

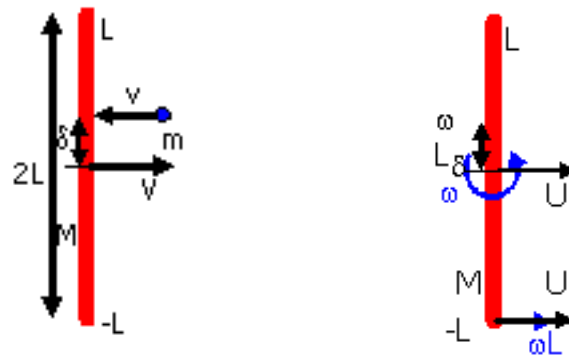
Inhoudsopgave

Sweet-Spot	1
Lichtdruk	2
Gekoppelde slingers	3
Magnetische Levitatie	5
Beam me up, Scotty!	7
The behavior of DNA under rotation	9
Zwarte gaten en lichtafbuiging in de theorie van Newton	11
De optische tunnel	13
Gamma-Laser	16
Linearizing a Digital-to-Analog Converter	17
Isolatie	18
Annihilatie	19

Sweet-Spot

Criterion: bal raakt het racket op een plek, z.d.d. de verandering van de snelheid van het deel waar de speler het racket vast heeft in het ideale geval gelijk aan nul is. Immers dan zal de kracht die t.g.v. de botsing tussen racket en bal op de hand-pols van de speler wordt uitgeoefend minimaal zijn en behoudt de speler maximale controle. Op symmetrie gronden is duidelijk, dat de bal hiervoor op lengte as van het racket dient te komen: anders wordt er een krachtmoment op het racket uitgeoefend, dat de speler moet compenseren. Door traagheidseffecten en reactietijd is de speler altijd te laat met z'n correctie, met controleverlies als gevolg.

Modelbeschrijving We vervangen het racket door een 1-dimensionale staaf, met uniforme dichtheid, massa M en lengte $2L$. Het racket beweegt op het moment van de botsing met de bal met snelheid V . De bal is een puntmassa met massa m , die vlak voor de botsing snelheid v heeft (tegengesteld aan V). De bal raakt het racket op een afstand δ van het centrum van het racket, zie de linker schets.



Na de botsing heeft de bal snelheid u , het racket snelheid U en hoeksnelheid ω . De botsing moet zodanig zijn, dat het onderste deel van de racket (op positie $z = -L$) geen snelheidsverandering ondergaat: $V = U + \omega L$. Voor het bostingsproces geldt: Behoud van impuls; Behoud van impulsmoment. We nemen een volkomen elastische botsing aan: Behoud van kinetische energie.

Impuls

$$MV = MU + F\Delta t$$

$$m(-v) = mu - F\Delta t$$

Impulsmoment racket

$$I\omega - 0 = \delta \cdot F\Delta t$$

Kinetische energie

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2 \text{ met } I = \frac{1}{3}ML^2.$$

Met de voorwaarde dat $V = U + \omega L$ volgt nu $\delta = \frac{1}{3}L$

Lichtdruk

Het vermogen van het uitgestraalde licht door de warme zijde van het bal-letje is $W_1 = \sigma(T + \Delta T)^4$. Vermogen van de straling van de koude zijde is $W_2 = \sigma T^4$.

$$\Delta W_L = W_1 - W_2 = \sigma(T + \Delta T)^4 - \sigma T^4.$$

$\Delta W_L = W_{in}$, waar W_{in} het vermogen is van het licht dat door de bal wordt geabsorbeerd. Daarmee vind je: $\Delta T \approx 15\text{K}$.

De druk van het gas aan de bestraalde zijde van de bal is hoger, omdat de atomen een hoger impuls na de botsing met de warme zijde van de bal krijgen in vergelijking met de impuls van atomen na een botsing met de koude zijde.

$$\Delta p = p\Delta T/(2T).$$

Als je Δp weet, dan kan je de kracht berekenen die voor de uitwijking zorgt.

$$F = \Delta p \pi R^2.$$

Als je de kracht hebt gevonden, dan is berekening van de uitwijking van een bal aan een touwtje eenvoudig.

$$mg = \frac{4}{3}\rho\pi R^3.$$

$$x = L \frac{F}{((mg)^2 + F^2)^{1/2}}$$

$$x \approx 0,2\text{mm}.$$

Gekoppelde slingers

(a) Je kunt dit op verschillende manieren oplossen, bijvoorbeeld door direkt de tweede wet van Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ toe te passen of via het Euler-Lagrange formalisme. Direkt toepassen van $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ met

$$\vec{F} = -mg \sin \phi \hat{\phi} \quad (1)$$

$$\vec{a} = l \ddot{\phi} \hat{\phi} \quad (2)$$

geeft

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi. \quad (3)$$

Voor kleine uitwijkingen geldt $\sin \phi \approx \phi$, zodat vgl. (3) reduceert tot $\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \phi$. Deze vergelijking heeft als oplossing lineaire combinaties van $\sin(\omega t)$ en $\cos(\omega t)$ met frequentie $\omega = \sqrt{g/l}$.

(b) Toepassen van $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ geeft voor de linkerslinger:

$$m l \ddot{\phi} = -mg \sin \phi - \kappa(l \sin \phi - l(t) \sin \psi) \cos \phi \quad (4)$$

en voor de rechterslinger:

$$m l(t) \ddot{\psi} = -mg \sin \psi + \kappa(l \sin \phi - l(t) \sin \psi) \cos \psi \quad (5)$$

(c) Voor kleine uitwijkingen reduceren vgl. (4) en (5) tot:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \phi - \frac{\kappa}{m} \left(\phi - \frac{l(t)}{l} \psi \right) \quad (6)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l(t)} \psi + \frac{\kappa}{m} \left(\frac{l}{l(t)} \phi - \psi \right) \quad (7)$$

Als we $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$, $\omega_0(t) \equiv \sqrt{g/l(t)}$ en $\beta \equiv \kappa/m$ definiëren en $l(t) = l$ nemen in de κ -termen kunnen we deze vergelijkingen schrijven als:

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \phi - \beta(\phi - \psi) \quad (8a)$$

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2(t) \psi + \beta(\phi - \psi) \quad (8b)$$

Neem nu aan dat $\ddot{\phi} = -\Omega^2(t) \phi$ en $\ddot{\psi} = -\Omega^2(t) \psi$, d.w.z. het gekoppelde systeem gaat met frequentie $\Omega(t)$ slingeren, en substitueer in vgl. (8). Oplossen van de resulterende kwadratische vergelijking geeft:

$$\Omega^2(t) = \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \omega_0^2(t) + 2\beta) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2(t))^2 + 4\beta^2} \quad (9)$$

Voor $l(t) = l(1 - 2\epsilon t)$ en $\beta \gg \epsilon t \omega_0^2$ vinden we tot op laagste orde de twee oplossingen

$$\Omega^2(t) \sim \begin{cases} \omega_0^2 + 2\beta \\ \omega_0^2(1 + \epsilon t), \end{cases} \quad (10)$$

dus een normal mode is tijdsafhankelijk en de andere neemt lineair toe in de tijd.

Magnetische Levitatie

(a) Het geïnduceerde magnetisch moment $\vec{m}(\vec{r})$ van het object wordt in zeer goede benadering gegeven door: $\vec{m}(\vec{r}) = \frac{\chi V \vec{B}(\vec{r})}{\mu_0}$, omdat $|\chi| \ll 1$.

De bijbehorende magnetische energie bereken je door de arbeid $-\vec{m} \cdot d\vec{B}$ te berekenen die verricht wordt als het magnetisch veld toeneemt van 0 tot de uiteindelijke waarde:

$$E(\vec{r}) = - \int_0^{B(\vec{r})} \vec{m} \cdot d\vec{B} = - \frac{\chi V}{\mu_0} \int_0^{B(\vec{r})} B dB = - \frac{\chi V}{2\mu_0} B^2(\vec{r}).$$

Dus de som van de gravitatie en magnetische energie is gegeven door:

$$E(\vec{r}) = M g z - \frac{\chi V}{2\mu_0} B^2(\vec{r})$$

Magnetische levitatie kan optreden als de zwaartekracht omlaag opgeheven wordt door een opwaartse magnetische kracht, dusdanig dat de totale kracht op het object nul is, zodat $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E(\vec{r}) = 0$. Dit levert:

$$M g \hat{z} - \frac{\chi V}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2(\vec{r}) = 0, \text{ zodat } \vec{\nabla} B^2(\vec{r}) = \frac{2\mu_0 \rho g}{\chi} \hat{z}. \text{ Q.E.D.}$$

(b) Een stabiel evenwicht vereist dat de kracht $\vec{F}(\vec{r})$ het object teruggedrijft naar de evenwichtspositie $\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} < 0$, waarbij de integraal uitgevoerd moet worden over een oppervlak S dat de evenwichtspositie omsluit. M.b.v. de stelling van Gauss $\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV$, betekent dit dat voor een stabiel evenwicht moet gelden dat $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$.

Het theorema van Earnshaw beperkt zich tot krachten die herleidbaar zijn tot een potentiaal $\psi(\vec{r})$ die voldoet aan de Laplace vergelijking: $\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0$. $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \psi(\vec{r})$, dus $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0$, zodat inderdaad een stabiel evenwicht met $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$ niet mogelijk is. M.a.w. er zijn géén lokale minima in $\psi(\vec{r})$. Een stabiel evenwicht kan niet bestaan in alle richtingen tegelijk en ten minste in n richting zal er een instabiliteit optreden.

(c) Stabiliteit vereist dus dat $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$, waarbij voor magnetische levitatie $\vec{F}(\vec{r}) = -M g \hat{z} + \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 B^2(\vec{r})$. Dus $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$ levert de volgende stabiliteitsconditie:

$$\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 B^2(\vec{r}) < 0$$

Voor paramagnetische materialen ($\chi > 0$) moet dus gelden dat $\nabla^2 B^2(\vec{r}) < 0$.

Voor diamagnetische materialen ($\chi < 0$) moet dus gelden dat $\nabla^2 B^2(\vec{r}) > 0$.

Uit de basiseigenschappen van een magnetisch veld in vacuum volgt dat alleen de conditie nodig voor diamagnetische materialen ($\nabla^2 B^2(\vec{r}) > 0$) gerealiseerd kan worden. Het bewijs gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \nabla^2 B^2 &= \nabla^2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = \nabla(2B_x \nabla B_x + 2B_y \nabla B_y + 2B_z \nabla B_z) \\ &= 2 [B_x \nabla^2 B_x + (\nabla B_x)^2 + B_y \nabla^2 B_y + (\nabla B_y)^2 + B_z \nabla^2 B_z + (\nabla B_z)^2] \\ &= 2 [(\nabla B_x)^2 + (\nabla B_y)^2 + (\nabla B_z)^2] \geq 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit het feit dat de componenten van $\vec{B}(\vec{r})$ ieder afzonderlijk voldoen aan de Laplace vergelijking: $\nabla^2 B_x = \nabla^2 B_y = \nabla^2 B_z = 0$.

Dit komt omdat in vacuum geldt dat $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ en $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$.

Hieruit volgt voor B_x (B_y en B_z gaan analoog):

$$\nabla^2 B_x = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_x}{\partial z}, \text{ waarbij}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \text{ omdat } \nabla \times \vec{B} = 0, \text{ zodat:}$$

$$\nabla^2 B_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

q.e.d.

(d) Uit opgave (c) blijkt dat diamagnetische objecten stabiel magnetisch geleviteerd kunnen worden omdat hun energie afhangt van de **grootte** van het magnetisch veld \vec{B} . In tegenstelling tot de componenten van \vec{B} voldoet de grootte van \vec{B} niet aan de Laplace vergelijking, zodat $\nabla^2 \psi(\vec{r}) > 0$ kan zijn in plaats van $\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0$.

De fysische verklaring hiervan zit hem in het feit dat het magnetisch moment $\vec{m}(\vec{r})$ niet constant is, maar afhangt van het magnetisch veld, volgens de vergelijking in onderdeel (a). Diamagnetisme vindt zijn oorsprong in de invloed van het magnetisch veld op de orbitalen van de electronen in een material en is dus dynamisch van aard, terwijl het theorema van Earnshaw zich beperkt tot statische situaties. Dit theorema is dus niet toepasbaar op situaties waarin diamagnetisme een rol speelt.

Beam me up, Scotty!

1)

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| &= \frac{1}{2}[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|] \\ |\beta_{01}\rangle\langle\beta_{01}| &= \frac{1}{2}[|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|] \\ |\beta_{10}\rangle\langle\beta_{10}| &= \frac{1}{2}[|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|] \\ |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| &= \frac{1}{2}[|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|] \end{aligned}$$

2) De toestand van de drie deeltjes voor de projectie is $(a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Als we de projector $|\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}|$ op de eerste van deze twee deeltjes laten inwerken, krijgen we

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|](a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a|00\rangle|0\rangle + a|11\rangle|0\rangle + b|00\rangle|1\rangle + b|11\rangle|1\rangle] \\ &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}(a|0\rangle + b|1\rangle). \end{aligned}$$

3) De deeltjes van Alice zitten nu in $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ en bevatten geen informatie meer over a en b . De geteleporteerde toestand is dus niet meer aanwezig bij Alice, en het exemplaar bij Bob is dus geen kopie.

4)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|](a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a|01\rangle|1\rangle + a|10\rangle|1\rangle + b|01\rangle|0\rangle + b|10\rangle|0\rangle] \\ &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}(a|1\rangle + b|0\rangle). \end{aligned}$$

5) Alice kan Bob informeren dat ze uitkomst β_{01} had (door communicatie met klassieke bits, m.a.w. nog steeds zonder kwantum deeltjes over te sturen). Bob weet dan dat hij $|\psi\rangle$ heeft, behalve dat elk quantum bit geflipt is. Door zijn kwantum systeem terug te flippen kan hij $|\psi\rangle$ krijgen.

6) Nee. Zolang Bob niet weet welke meetuitkomst Alice had, weet hij niet of zijn bits goed zitten of geflipt zijn.

7) Nee. Bij meting van $|\psi\rangle$ in een bepaalde basis stort de golf functie in. Je zou een groot aantal deeltjes moeten hebben die allemaal in $|\psi\rangle$ zitten, die je allemaal meet (op verschillende manieren) om erachter te komen wat a en b zijn.

The behavior of DNA under rotation.

1. The typical energy scale is $k_B T$, and of course the energy must be expressed in Joules. Therefore the constant should be $k_B T$ multiplied by a characteristic length, which in this system is the polymer stiffness A . Therefore our constant will be proportional to $\frac{k_B T A}{2}$. The proportionality to A makes sense because given a given loop radius of curvature, it should cost more energy to bend a stiffer polymer.
2. There are two contributions to this energy, the bending energy and the work done against the applied force.

Using the above expression, we deduce that the bending energy required for the DNA will form a complete loop, which subtends an angle of 360 degrees, equals:

$$E(R) = \left(\frac{k_B T A}{2} \right) \left(\frac{2\pi}{R} \right) = \frac{k_B T A \pi}{R} \quad (11)$$

In addition, the formation of a loop of circumference $2\pi R$ requires the polymer to do work against the applied force f equal to $2\pi R f$. Therefore, the total energy cost for loop formation in this case is:

$$E(R) = \frac{k_B T A \pi}{R} + 2\pi R f \quad (12)$$

3. If we differentiate the previous expression with respect to R and then set it equal to zero to determine the loop radius R which gives the minimum energy configuration, we get:

$$0 = -\frac{k_B T A \pi}{R^2} + 2\pi f \quad (13)$$

which we can solve for R^* to get:

$$R^* = \sqrt{k_B T A / 2f} \quad (14)$$

The associated loop size $2\pi R$ at $f = 1$ pN, given $A = 50$ nm, is equal to $2\pi (10 \text{ nm})$ or about 60 nm.

Plugging in the value of R^* into the expression for the loop energy, we deduce that:

$$\begin{aligned} E(R^*) &= \frac{k_B T A \pi}{R^*} + 2\pi R^* f \\ &= 2\sqrt{2}\pi \sqrt{k_B T A f} \end{aligned} \quad (15)$$

Plugging in $A = 50 \text{ nm}$, $f = 1$ pN, and $k_B T = 4$ pN nm, we deduce that $E(R^*) = 117 \cdot 10^{-21}$ J (or 117 pN nm), which is equal to ≈ 30 $k_B T$.

4. As stated above, the torsional energy is equal to:

$$E = \frac{1}{2} k_B T C \theta^2 / L_0 \quad (16)$$

or:

$$E = \frac{k_B T C (2\pi n)^2}{2 L_0} \quad (17)$$

where n is the number of times the DNA molecule is twisted about its axis prior to buckling. Therefore, the change in torsional energy of the molecule between incorporating $n + 1$ turns and n turns is equal to:

$$\begin{aligned} \Delta E_{torsion} &= \frac{1}{2} \frac{k_B T C (4\pi^2)}{L_0} ((n+1)^2 - n^2) \\ &\approx \frac{2\pi^2 k_B T C}{L_0} (2n) \\ &= \frac{4\pi^2 k_B T C n}{L_0} \end{aligned} \quad (18)$$

where we have assumed that $n \gg 1$. We can see that the torsional energy that the molecule must accommodate increases with n . This will continue until this increase in torsional energy exceeds the energy required to form a loop, i.e. until:

$$\frac{4\pi^2 k_B T C n_{buckling}}{L_0} = 2\sqrt{2\pi} \sqrt{k_B T A f} \quad (19)$$

Hence we deduce that:

$$n_{buckling} = \frac{2\sqrt{2\pi} L_0 \sqrt{k_B T A f}}{4\pi^2 k_B T C} = \sqrt{\frac{A f L_0^2}{2\pi^2 C^2 k_B T}} \quad (20)$$

Plugging in $A = 50nm$, $f = 1$ pN, $L_0 = 3 \mu m$, $C = 100$ nm, and $k_B T = 4$ pN nm, we deduce that $n_{buckling}$ is equal to ≈ 25 turns.

5. Loop formation occurs because the torsional energy to twist the DNA molecule by one further turn starts to exceed the energetic cost of loop formation. A sketch of the behavior of a DNA molecule under rotation is shown in the figure below.

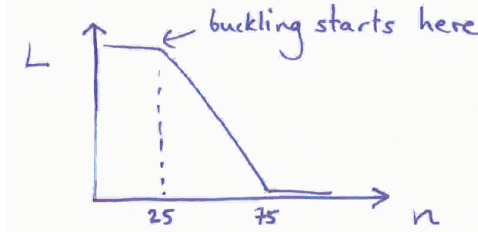


Figure 1: Extension of a DNA molecule as a function of the applied turns n .

Zwarte gaten en lichtafbuiging in de theorie van Newton

(a) $\frac{m}{2}c^2 = \frac{GmM}{Z} \Rightarrow Z = \frac{2GM}{c^2}$. Dit is hetzelfde antwoord als in het Schwarzschild-model.

(b) Omdat de massa van het zwarte gat veel groter is dan die van de planeet, mogen we het krachtcentrum laten samenvallen met het centrum van het zwarte gat en de gereduceerde massa gelijk stellen aan de planeetmassa. De centripetale kracht moet geleverd worden door de aantrekkingskracht:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{GmM}{a^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{GM}{ac^2} = \frac{Z}{2a}$$

Hoewel u het zwarte gat niet kunt zien kunt u op deze manier toch afmeting en massa bepalen.

(c) Een jaar heeft ongeveer $3,15 \cdot 10^7$ s.

$$\Rightarrow v_{aarde} = \frac{2\pi a}{T} \simeq \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8}{3,15 \cdot 10^7} \simeq 30 \text{ km/s} \Rightarrow Z_{zon} \simeq 2 \left(\frac{30}{3 \cdot 10^5} \right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 3 \text{ km}.$$

Volgens een gelijksoortige berekening: $v_{maan} \simeq 1 \text{ km/s} \Rightarrow Z_{aarde} \simeq 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 10^5} \right)^2 \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ km} \simeq 9 \text{ mm}$.

(d) Voor een deeltje dat invalt vanaf de richting met $y > 0$ (zie figuur in opgave):

$$r \rightarrow \infty : \quad E = \frac{m}{2}v^2, \quad L_z = mvd, \quad \vec{A} = m^2v^2\vec{d} - m^2k\hat{r}.$$

Inproduct van \vec{A} met \vec{d} (als $r \rightarrow \infty$ is $\vec{d} \cdot \hat{r} = 0$):

$$\vec{A} \cdot \vec{d} = m^2v^2d^2 \tag{21}$$

In het perihelion: uit de figuur blijkt dat $x = -R$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} < 0$

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{mk}{R} = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow \dot{y} = -\sqrt{v^2 + \frac{2k}{R}}$$

$$L_z = mx\dot{y} - my\dot{x} = mR\sqrt{v^2 + \frac{2k}{R}} = mvd \Rightarrow d = \frac{R}{v}\sqrt{v^2 + \frac{2k}{R}} = R\sqrt{1 + \frac{2k}{Rv^2}}$$

$$\vec{A} = m\dot{y}L_z\hat{x} - m^2k(-\hat{x}) = -m^2v d\sqrt{v^2 + \frac{2k}{R}}\hat{x} + m^2k\hat{x} = -m^2\left(\frac{v^2d^2}{R} - k\right)\hat{x}$$

Inproduct met \vec{d} :

$$\vec{A} \cdot \vec{d} = -m^2\left(\frac{v^2d^2}{R} - k\right)\hat{x} \cdot \vec{d} = m^2\left(\frac{v^2d^2}{R} - k\right)d \cos \theta \tag{22}$$

Gelijkstellen van (21) en (22): $m^2 \left(\frac{v^2 d^2}{R} - k \right) d \cos \theta = m^2 v^2 d^2$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{v^2 R \sqrt{1 + 2k/Rv^2}}{v^2 R (1 + 2k/Rv^2) - k} = \frac{\sqrt{1 + 2k/Rv^2}}{1 + k/Rv^2}. \quad (23)$$

Als we k invullen en $v = c$ stellen, is $\frac{k}{Rc^2} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{GM\mu/R}{\mu c^2}$, waarin μ een willekeurige massa is. De verhouding is die van de gravitatie-energie aan het steroppervlak van een deeltje met massa μ tot zijn rustenergie. Als de ster (nog lang) geen zwart gat is, is deze verhouding klein, zodat (23) niet veel van 1 afwijkt. We mogen dus ontwikkelen:

$$\begin{aligned} \cos \theta &\simeq 1 - \theta^2/2 \simeq \frac{\sqrt{1+2k/Rv^2}}{1+k/Rv^2} \simeq \left(1 + \frac{k}{Rv^2} - \frac{k^2}{2R^2v^4} + \dots \right) \left(1 - \frac{k}{Rv^2} + \frac{k^2}{R^2v^4} + \dots \right) \simeq \\ &\simeq 1 - \frac{k^2}{2R^2v^4} \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq \frac{k}{Rv^2} \end{aligned}$$

De verstrooiingshoek is dus (als we weer $v = c$ stellen) $2\theta \simeq 2k/Rc^2 = 2GM/Rc^2$.

Dit is de helft van het resultaat uit de Algemene Relativiteitstheorie. Einstein publiceerde in 1911 deze zelfde uitkomst van een berekening op basis van alleen het equivalentieprincipe en werd op grond hiervan in 1921 door Lenard van plagiaat (van Soldners artikel) beschuldigd.

De optische tunnel

(a) Begin met: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Invullen van $\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ en gebruik maken van $\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{B} \approx \mu_0\vec{B}$ levert direct op: $\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu_0\vec{H}$. Oftewel: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{k} \times \vec{E}$.

(b)

Eerst beschouwen we het elektrische veld op het grensvlak. Het elektrische veld heeft alleen een tangentiële component en dus geldt er op het grensvlak: $e^{ik_x^{(1)}x} + re^{ik_x^{(1)}x} = te^{ik_x^{(2)}x}$

De absolute waarde en de fase moeten hetzelfde zijn. Hieruit volgt dat $k_x^{(1)} = k_x^{(2)}$ en $1 + r = t$.

Nu het magnetische veld. Een vlakke tijdharmonische golf invullen in de Maxwell vergelijkingen geeft voor een niet-magnetisch materiaal:

$\vec{H}^{(j)} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{k}^{(j)} \times \vec{E}^{(j)}$. Invullen van $\vec{k}^{(1)}$, $\vec{k}^{(2)}$, $\vec{E}^{(1)}$ en $\vec{E}^{(2)}$ en ervoor zorgen dat de x -component van \vec{H} continu is, geeft ons:

$$\frac{-k_z^{(1)}}{\mu_0\omega} + \frac{rk_z^{(1)}}{\mu_0\omega} = \frac{-tk_z^{(2)}}{\mu_0\omega}$$

Deze vergelijking geeft in combinatie met $1 + r = t$ de uitdrukkingen voor de reflectie- en transmissiecoëfficiënt:

$$r = \frac{k_z^{(1)} - k_z^{(2)}}{k_z^{(1)} + k_z^{(2)}} \quad t = \frac{2k_z^{(1)}}{k_z^{(1)} + k_z^{(2)}}$$

(c)

Omdat $\vec{k}_\pm^{(j)} = k_x^{(j)}\hat{x} \pm k_z^{(j)}\hat{z}$ geldt (A is the amplitude van het elektrische veld dat in de y -richting gepolariseerd is):

$$\begin{aligned} \vec{S}_\pm &= \frac{1}{2}\text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2}\text{Re} \left[A\hat{y}e^{i\vec{k}_\pm^{(j)} \cdot \vec{r}} \times \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k}_\pm^{(j)*} \times \hat{y}A^*e^{i\vec{k}_\pm^{(j)*} \cdot \vec{r}} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_0}|A|^2 e^{-2\text{Im}\vec{k}_\pm^{(j)} \cdot \vec{r}} \left[\vec{k}_\pm^{(j)*} - \vec{k}_\pm^{(j)*} \cdot \hat{y}\hat{y} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_0}|A|^2 \vec{k}_\pm^{(j)} \end{aligned} \quad (24)$$

$\vec{k}^{(j)}$ is een reële vector en $k_y^{(j)} = 0$.

De totale flux in V is de integraal van de normaal component (inwendige normaal vector gebruiken) over de rand van V .

Het veld in $z < 0$ bestaat uit de som van een inkomende en een gereflecteerde golf:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left(e^{i\vec{k}_+^{(1)} \cdot \vec{r}} + re^{i\vec{k}_- \cdot \vec{r}} \right) \hat{y}, \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\omega\mu_0} \left(e^{i\vec{k}_+^{(1)} \cdot \vec{r}} \vec{k}_+^{(1)} \times \hat{y} + re^{i\vec{k}_- \cdot \vec{r}} \vec{k}_+^{(1)} \times \hat{y} \right) \end{aligned}$$

$\vec{S}_+ = \frac{1}{2\omega\mu_0}\vec{k}_+^{(1)}$ en $\vec{S}_- = \frac{r^2}{2\omega\mu_0}\vec{k}_-^{(1)}$ zijn de Poynting vectoren van de afzonderlijke invallende en gereflecteerde golven. Voor de Poynting vector van het

totale veld geldt:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{S}_+ + \vec{S}_- + \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Re} \left[r^* e^{i\vec{k}_+^{(1)} \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k}_-^* \cdot \vec{r}} \hat{y} \times (\vec{k}_+^{(1)*} \times \hat{y}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Re} \left[r^* e^{i\vec{k}_-^{(1)} \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k}_+^{(1)*} \cdot \vec{r}} \hat{y} \times (\vec{k}_-^{(1)*} \times \hat{y}) \right] \\ &= \vec{S}_+ + \vec{S}_- + \frac{r}{2\omega\mu} \cos(2k_z^{(1)} z) \vec{k}_-^{(1)} + \frac{r}{2\omega\mu_0} \cos(2k_z^{(1)} z) \vec{k}_+^{(1)}.\end{aligned}$$

Als de z -component integreren over de onderste rand $z = \text{constant}$ van V , dan heffen de laatste twee termen elkaar op. We krijgen dan dus

$$\begin{aligned}\text{Flux door onderste rand } z = \text{constant} < 0 \text{ in } V &= \iint \vec{S}_+ \cdot \hat{z} + \vec{S}_- \cdot z \, dx dy \\ &= \frac{1}{2\omega\mu} (1 - r^2) k_z^{(1)} \iint dx dy. \quad (25)\end{aligned}$$

De integraal van de totale Poynting vector normaal component over de linker en rechter rand heffen elkaar op. Immers, de Poynting vector is onafhankelijk van x en de inwendige normalen staan in tegengestelde richting op de linker en rechter rand.

Tenslotte de flux naar binnen door de bovenste rand. Daar is de inwendige normaal vector $-\hat{z}$ en er is daar alleen de doorgelaten golf. Dus krijgen we

$$\text{Flux door de boven rand } z = \text{constant} > 0 \text{ in } V = -\frac{1}{2\omega\mu_0} t^2 k_z^{(2)} \iint dx dy \quad (26)$$

Omdat $(1 - r^2) k_z^{(1)} = t^2 k_z^{(2)}$ volgt dat er netto net zo veel energie naar binnen al naar buiten V gaat.

$$\begin{aligned}\text{(d) } \vec{H}^{(2)} &= \frac{1}{\mu_0\omega} \vec{k}^{(2)} \times \vec{E}^{(2)} \\ \vec{E}^{(2)} &= \frac{2k_x^{(1)}}{k_z^{(1)} + k_z^{(2)}} e^{i(k_x^{(2)} x + k_z^{(2)} z)} \\ \vec{k}^{(2)} &= k_x \hat{x} + k_z^{(2)} \hat{z}.\end{aligned}$$

Deze drie vergelijkingen geven:

$$\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{*(2)} = \frac{4(k_z^{(1)})^2 k_x^{(2)}}{\left((k_z^{(1)})^2 + |(k_z^{(1)})|^2\right) \mu_0\omega} \hat{x} + \frac{2(k_z^{(1)})^2 k_z^{*(2)}}{\left((k_z^{(1)})^2 + |(k_z^{(1)})|^2\right) \mu_0\omega} \hat{z}.$$

Merk hierbij wel op dat alleen $k_z^{*(2)}$ complex is.

Aangezien $\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{*(2)}\}$, volgt hier direct uit:

$$\vec{S} = \frac{2(k_z^{(1)})^2 k_x^{(2)}}{\left((k_z^{(1)})^2 + |(k_z^{(1)})|^2\right) \mu_0\omega} \hat{x}.$$

Het energie-transport vindt dus plaats langs het oppervlak.

(e) Er geldt voor alle $k_x > k_0 n_2$ dat de absolute waarde van de reflectiecoëfficiënt 1 is (en dus wordt alle energie gereflecteerd).

(f) Uit het feit dat de tangentiële componenten van het elektrische veld continu zijn op elk grensvlak en dat de brekingsindex van de omliggende lagen gelijk zijn, volgt direct dat de golfvector in het glas hetzelfde is als de inkomende golfvector.

(g) De energiestroom in de positieve z -richting in medium 2 per eenheid van oppervlakte wordt gegeven door de z -component van de Poynting vector van het doorgelaten veld:

$$\vec{S} \cdot \hat{z} = \frac{1}{2\omega\mu_0} \tau^2 k_z^{(2)}. \quad (27)$$

(h) Op het eerste gezicht lijkt dit heel erg raar, omdat de som van de twee energiestromen niet zomaar in de z -richting kan wijzen. Echter, we weten dat de Pointingvector gelijk is aan het uitproduct van het elektrische en het magnetische veld. In plaats van het optellen van de Pointingvectors is het de bedoeling dat de elektrische velden en magnetische velden worden opgeteld. De kruisproducten zorgen voor een energiestroom in de z -richting.

Gamma-Laser

In het stelsel van de elektronen is de onderlinge afstand van de magneten:
 $L' = \frac{L}{\gamma}$.

De golflengte van de uitgezonden straling in het elektron-stelsel is $2L'$ zodat voor de energie geldt:

$$E' = hf' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2L'} = \frac{hc}{2L}\gamma, \text{ zodat } f' = \frac{c}{2L}\gamma.$$

Vanwege de Doppler-verschuiving is de waargenomen frequentie in het lab-stelsel:

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f' = \frac{c}{2L}\gamma \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{c}{2L} \frac{1}{1-\beta}, \text{ zodat } \lambda = 2L(1-\beta).$$

Als het elektron een spanning van V volt doorloopt, dan geldt voor de kinetische energie: $eV = K = (\gamma - 1)mc^2$, zodat $\gamma = \frac{eV}{mc^2} + 1 \approx \frac{eV}{mc^2}$ voor grote waarden van γ .

Dan geldt dat: $\lambda \approx L \left(\frac{mc^2}{eV} \right)^2 \propto \frac{1}{V^2}$

Linearizing a Digital-to-Analog Converter

Question 1: Let the i^{th} current source has a weight $w[i]$ and has an error $e[i]$, such that $w[i] = w + e[i]$, where w is the ideal weight that divides the span of the DAC into N equal steps.

In other words the ideal DAC characteristic is a straight line that starts at 0 and ends at Nw . Or expressed mathematically: $\sum(w[i]) = Nw$.

But by definition $\sum(w[i]) = Nw + \sum(e[i])$, which means that $\sum(e[i]) = 0$.

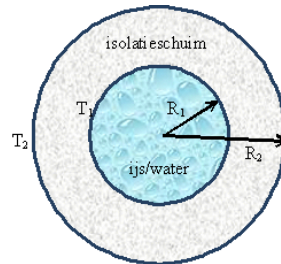
This property means that randomly selecting the M current sources used to generate a nominal or target current Mw , will ensure that the instantaneous error in the DACs output current will also behave randomly. Furthermore this error will have an average error of zero.

In other words, random selection converts static errors into a noise-like signal. This, in turn, eliminates the harmonics in the DACs output current.

Question 2: What can we say about cyclic rotation? Since it prevents devices from being used more than once in a row, which could happen if we use random selection, the average error in the DACs output current tends towards zero much faster. This is because the average error after one rotation, i.e. after N current sources have been selected, is exactly equal to zero.

In other words, cyclic rotation converts static errors into an AC signals. Since rotation always takes place, the period of these signals is always non-zero and thus the resulting noise spectrum is significantly suppressed at low frequencies. In contrast, random selection converts static errors into an evenly distributed noise spectrum.

Isolatie



De warmtestroom ϕ_q door het isolatieschuim is geen functie van r . Dit leidt tot: $4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = \phi_q$, met als randvoorwaarden: $r = R_1$: $T = T_1$; $r = R_2$: $T = T_2$. Hierin is λ de warmtegeleidingscoëfficiënt van het isolatieschuim, T_1 de smelttemperatuur van ijs, T_2 de temperatuur van de buitenlucht, R_1 de straal van het bolletje ijs en R_2 de straal van de bol isolatieschuim. De oplossing luidt:

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)^{-1}$$

Dus de warmtestroom door het isolatieschuim bedraagt:

$$\phi_q = 4\pi\lambda(T_2 - T_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

Teneinde de temperatuur in het ijsbolletje op 0°C te houden, mag niet al het ijs smelten, dus:

$$\phi_q \cdot \Delta t \leq \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot \rho \cdot \Delta H$$

met Δt de transporttijd, ρ de dichtheid van ijs en ΔH de smeltwarmte van ijs. Hieruit volgt:

$$R_2 \geq \frac{R_1^3 \cdot \rho \cdot \Delta H}{R_1^2 \cdot \rho \cdot \Delta H - 3\lambda(T_2 - T_1) \cdot \Delta t} = \frac{c_1 R_1^3}{c_1 R_1^2 - c_2}$$

Minimalisatie van de buitenafmeting geeft:

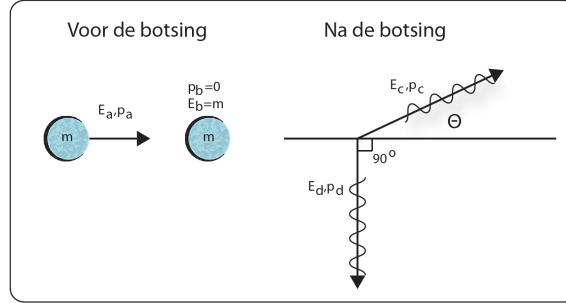
$$\frac{dR_2}{dR_1} = 0 \rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{3c_2}{c_1}} = 3\sqrt{\frac{\lambda(T_2 - T_1) \cdot \Delta t}{\rho \cdot \Delta H}}$$

$$\rightarrow R_2 \geq \frac{9}{2} \left(\frac{\lambda(T_2 - T_1) \cdot \Delta t}{\rho \cdot \Delta H}\right)^{1/2} = \frac{9}{2} \left(\frac{0.02 \cdot 40 \cdot 172800 \frac{[\text{J}]}{[\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{s}]} [\text{K}] [\text{s}]}{915 \cdot 334000 \frac{[\text{kg}]}{[\text{m}^3]} \frac{[\text{J}]}{[\text{kg}]}}}\right)^{1/2} = 0.0957\text{m}$$

(Voor R_1 vinden we $R_1 = \frac{2}{3}R_2 = 0,0638\text{m}$, groot genoeg om een kleine hoeveelheid X in op te bergen.)

Annihilatie

We gebruiken de notatie als in de figuur.



Behoud van energie, inclusief de rust energie, geeft de relatie:

$$E_{tot} = E_a + m = E_c + E_d$$

en we kunnen ook het behoud van impuls opschrijven in de x - en y -richting:

$$p_{x,tot} = p_a = p_c \cos \theta \quad (28)$$

$$p_{y,tot} = 0 = p_c \sin \theta - p_d \quad (29)$$

Nu gebruiken we dat de kinetische energie van deeltje a gelijk is aan zijn massa m , en dat de fotonen massaloos zijn:

$$E_a + m = 2m + m = 3m = E_c + E_d \quad (30)$$

$$p_a = E_c \cos \theta \quad (31)$$

$$E_d = E_c \sin \theta \quad (32)$$

en we hebben drie vergelijkingen met de drie onbekenden E_c, E_d, θ . Om dit op te lossen kwadrateer de twee laatste vergelijkingen:

$$p_a^2 + E_d^2 = E_c^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = E_c^2$$

en substitueer $p_a^2 = E_a^2 - m^2$ om te krijgen:

$$E_c^2 = E_a^2 - m^2 + E_d^2 = 4m^2 - m^2 + E_d^2 = 3m^2 + E_d^2$$

Nu kunnen we de vergelijking van behoud van energie oplossen voor E_c om een tweede uitdrukking voor E_c te krijgen:

$$E_c^2 = (3m - E_d)^2 = 9m^2 - 6mE_d + E_d^2$$

en de rechterzijden van beide bovenstaande vergelijkingen zijn dan gelijk aan elkaar:

$$3m^2 = 9m^2 - 6mE_d$$

waardoor we E_d nu hebben:

$$E_d = m$$

Nu is het met behulp van behoud van energie duidelijk dat voor E_c geldt:

$$E_c = 3m - E_d = 2m$$

en de hoek θ uit ver impulsbehoud in de y -richting

$$\sin \theta = \frac{p_d}{p_c} = \frac{E_d}{E_c} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

waaruit volgt dat $\theta = 30^\circ$. Hiermee is de eindtoestand vastgelegd.