

# POW

2013

## ANTWOORDEN



Mede mogelijk gemaakt door: nederlandse



PANalytical



natuurkundige vereniging

Universiteitsfonds  
Eindhoven



Stichting  
Physica



UNIVERSITEIT  
VAN AMSTERDAM



Universiteit  
Leiden



rijksuniversiteit  
groningen



**Colofon**

Dit antwoordenboekje is een uitgave van de  
PION-commissie 2013.

*e-mail:* [pion@vdwaals.nl](mailto:pion@vdwaals.nl)

*Internet:* [www.vdwaals.nl/pion](http://www.vdwaals.nl/pion)

---

## Inhoudsopgave

---

Opgave	Punten		Pagina
1	12	Een diabolo als jojo	3
2	8	Moleculair spectrum	5
3	10	Majorana-deeltjes	6
4	13	Ultrakorte elektronenpulsen	7
5	6	Pour some sugar on me	9
6	10	Een kernfusiereactor die Helium-3 van de maan gebruikt?	11
7	8	Fotonen uit een synchrotron	12
8	13	Stabiliteit en het kritisch punt	13
9	9	De waterklok en puntwervels	16
10	11	De drijvende kracht achter de laser-plasma-deeltjesversneller	19
11	8	Positiemeting van een wafer stage	20
12	12	Het GHZ-experiment	21

---

## 1. Een diabolo als jojo

*R. Engeln*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**12 punten**

---

**Vraag 1:** Het traagheidsmoment van één kegel wordt verkregen door:

$$I_1 = \iiint s^2 dm = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dx \int_0^{r(x)} ds \cdot \rho(x) s^3 \quad (1.1)$$

Hierin is  $s$  de afstand van elk elementje  $dm$  tot de omwentelingsas. Invullen van  $\rho(x) = \left(\frac{|x|+H}{H}\right)\rho_0$  en  $r(x) = \frac{R}{H}x$  en integreren geeft:

$$I_1 = \frac{11}{60}\pi\rho_0 R^4 H \quad (1.2)$$

De massa van één kegel wordt verkregen door:

$$M_1 = \iiint dm = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dx \int_0^{r(x)} ds \cdot \rho(x) s = \frac{7}{12}\pi\rho_0 R^2 H \quad (1.3)$$

Het combineren van vergelijkingen 1.2 en 1.3 en het feit dat de diabolo uit twee kegels bestaat, resulteert in het traagheidsmoment van de gehele diabolo:

$$I = \frac{11}{35}MR^2 \quad (1.4)$$

**Vraag 2:** De hoeksnelheid van de diabolo op het moment dat hij de grond raakt, kan worden berekend met behulp van energiebehoud:

$$MgL = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1.5)$$

Hierin is  $v$  de translatiesnelheid en  $\omega$  de rotatiesnelheid van de jojo op het moment dat hij de grond raakt. Het gebruiken van de relatie  $v = \frac{1}{2}D\omega$  en de bij vraag 1 verkregen uitdrukkingen  $I = \frac{11}{35}MR^2$  en  $M = \frac{7}{6}\pi\rho_0 R^2 H$  leidt tot een uitdrukking voor de hoeksnelheid:

$$\omega = \sqrt{\frac{gL}{\frac{1}{8}D^2 + \frac{11}{70}R^2}} \quad (1.6)$$

**Vraag 3:** Op het moment dat de diabolo rolt zonder te slippen, geldt:

$$v = \omega R \quad (1.7)$$

Voor de wrijvingskracht op de diabolo geldt:

$$F_w = \mu_k F_N = \mu_k Mg \quad (1.8)$$

De diabolo wordt dus eenparig versneld. Dit leidt tot  $v = \mu_k gt$  en  $\omega = \omega_0 - \alpha t$ . Invullen in vergelijking 1.7 en herschrijven geeft een uitdrukking voor  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{\omega_0 R}{\mu_k g + \alpha R} \quad (1.9)$$

De hoekversnelling  $\alpha$  kan nu verkregen worden door gebruik te maken van  $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{FR}{I}$ , en vergelijking 1.4 voor  $I$  in te vullen. Uitwerken geeft:

$$T_1 = \frac{11 \omega_0 R}{46 \mu_k g} \quad (1.10)$$

Vergelijking 1.10 invullen in  $x = \frac{1}{2} \mu_k gt^2$  geeft:

$$d = x(T_1) = \frac{121 \omega_0^2 R^2}{4232 \mu_k g} \quad (1.11)$$

**Vraag 4:** De arbeid die wordt verricht door wrijving tussen  $t = 0$  en  $t = T_1$  kan op verschillende manieren berekend worden, bijvoorbeeld door middel van een energiebalans. De arbeid die door de wrijvingskracht geleverd wordt, bestaat uit de omzetting van rotatie- naar translatie-energie en de omzetting van rotatie-energie naar warmte als gevolg van het slippen. Deze twee processen leiden tot een verschil tussen de initiële en de uiteindelijke rotatie-energie. De initiële rotatie-energie wordt gegeven door:

$$E_{rot,t=0} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \quad (1.12)$$

met  $I$  zoals gegeven in vergelijking 1.4. De uiteindelijke rotatie-energie wordt gegeven door:

$$E_{rot,t=T_1} = \frac{1}{2} I (\omega_0 - \alpha T_1)^2 \quad (1.13)$$

waarbij de hoekversnelling  $\alpha$  weer wordt gegeven door  $\alpha = \frac{F_w R}{I}$ . Door het verschil te nemen van vergelijkingen 1.12 en 1.13 verkrijgen we het gewenste resultaat voor de arbeid:

$$W = \Delta E_{rot} = E_{rot,t=0} - E_{rot,t=T_1} = \frac{9779}{25392} \pi \rho_0 \omega_0^2 R^4 H \quad (1.14)$$

---

## 2. Moleculair spectrum

*S.Y.T. van de Meerakker  
Radboud Universiteit Nijmegen*

**8 punten**

---

**Vraag 1:** In het spectrum valt op dat de R-branch omdraait bij  $J \approx 5$ . Voor een R-lijn geldt  $\Delta J = +1$ , dus we hebben:

$$\Delta, J \rightarrow \Pi, J + 1 \quad (2.1)$$

De energieën van de overgangen liggen dan bij:

$$B_{\Pi}(J + 1)(J + 2) - B_{\Delta}J(J + 1) = (B_{\Pi} - B_{\Delta})J^2 + (3B_{\Pi} - B_{\Delta})J + 2B_{\Pi} \quad (2.2)$$

Dit is een parabolische functie: we zien aan het spectrum (het omdraaipunt in de R-branch) dat het een bergfunctie moet zijn, met een energetisch maximum bij  $J \approx 5$ . De term  $B_{\Pi} - B_{\Delta}$  moet dus  $< 0$  zijn:

$$B_{\Delta} > B_{\Pi} \quad (2.3)$$

**Vraag 2:** Het omdraaipunt in de R-branch ligt bij  $J \approx 5$ . Dus:

$$\frac{dE}{dJ} = 2(B_{\Pi} - B_{\Delta})J + 3B_{\Pi} - B_{\Delta} = 0 \quad (2.4)$$

Voor  $J \approx 5$ :

$$B_{\Pi} = \frac{11}{13}B_{\Delta} = 0,85 \cdot B_{\Delta} \quad (2.5)$$

*Note:* volgens NIST-database:  $B_{\Pi} = 14,5 \text{ cm}^{-1}$ ,  $B_{\Delta} = 16,4 \text{ cm}^{-1}$ .

**Vraag 3:** ND versus NH: traagheidsmoment  $\mu R^2$  verdubbelt bijna, omdat het *center of mass* bijna in het N-atoom ligt:

$$\mu(\text{NH}) = \frac{m_{\text{H}} \cdot m_{\text{N}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{N}}} = \frac{14}{15} = 0,93 \text{ au} \quad (2.6)$$

$$\mu(\text{ND}) = \frac{m_{\text{D}} \cdot m_{\text{N}}}{m_{\text{D}} + m_{\text{N}}} = \frac{14,2}{16} = 1,75 \text{ au} \quad (2.7)$$

Omdat  $B \sim \frac{1}{\mu R^2}$  is  $B(\text{ND}) \approx 0,5 \cdot B(\text{NH})$  voor zowel de  $\Pi$ - als de  $\Delta$ -toestand. De lijnen komen dus een factor 2 dicht bij elkaar te liggen. Het omdraaipunt in de R-branch ligt nog steeds bij  $J \approx 5$ .

---

### 3. Majorana-deeltjes

C.W.J. Beenakker  
Universiteit Leiden

10 punten

---

**Vraag 1:** Majorana-deeltjes kunnen elkaar opheffen, dus er blijft dan geen lading over. Vanwege de wet van behoud van lading moet het Majorana-deeltje dus elektrisch neutraal zijn (lading nul).

**Vraag 2:** Stel dat  $\psi_e = f(x)$ ,  $\psi_g = g(x)$  een oplossing is van de eerste vergelijking bij energie  $E$ . We vullen deze oplossing in, vermenigvuldigen beide zijden van de vergelijking met  $-1$  en nemen de complex geconjugeerde. Dat levert op

$$\begin{cases} eV(x)f^*(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}g^*(x) = -Ef^*(x) \\ -eV(x)g^*(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}f^*(x) = -Eg^*(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

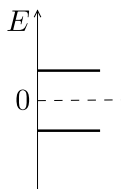
Hieruit concluderen we dat  $\psi_e = g^*(x)$ ,  $\psi_g = f^*(x)$  een oplossing is van de eerste vergelijking bij energie  $-E$ .

**Vraag 3:** De gegeven functie voldoet aan

$$-i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_e(x) = -eV(x)\psi_g(x), \quad -i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_g(x) = eV(x)\psi_e(x) \quad (3.2)$$

Het is dus een oplossing van de eerste vergelijking voor  $E = 0$ . Om het teken van  $s$  te bepalen, merken we op dat  $|\psi_e(x)|$  *afvalt* met toenemende  $x$  als  $s = +1$ , dus deze golf functie beschrijft een deeltje dat zich in de buurt van het *linker* uiteinde van de draad bevindt. Als je  $s = -1$  zou kiezen, dan zou  $|\psi_e(x)|$  juist *toenemen* met toenemende  $x$ , hetgeen van toepassing is op een deeltje aan het *rechter* uiteinde van de draad.

**Vraag 4:** Zie onderstaande figuur. De oplossing bij  $E = 0$  is rond nul symmetrisch opgesplitst in een positief en een negatief energieniveau (zoals vereist door de deeltje-antideeltje symmetrie).



---

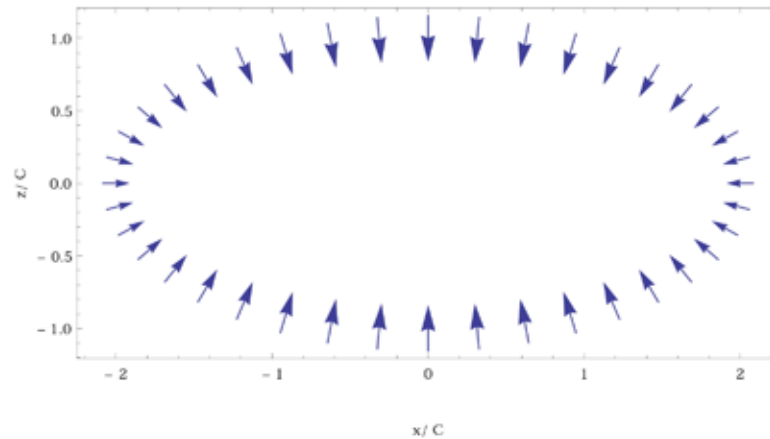
#### 4. Ultrakorte elektronenpulsen

*E.J.D. Vredenburg*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

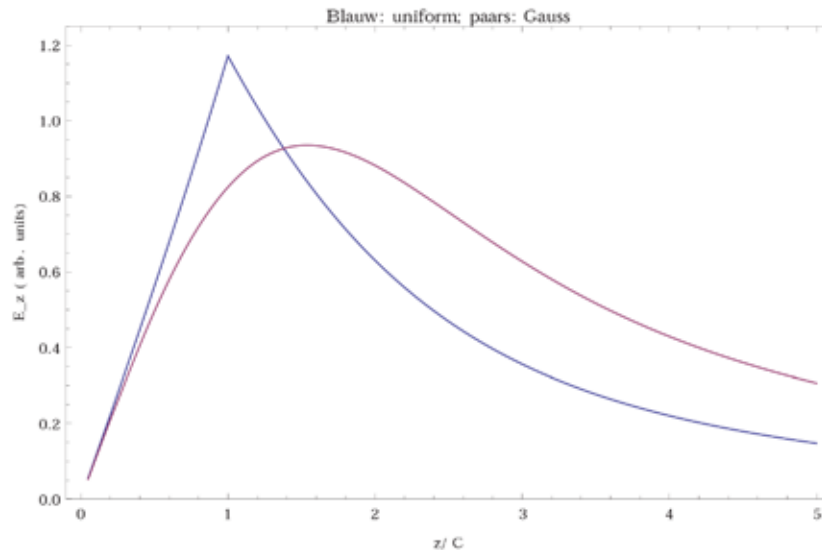
**13 punten**

---

**Vraag 1:** Uit  $\nabla^2 V = -\rho_0/\epsilon_0$  binnen de wolk volgt dat  $V$  een parabolische functie is van elk van de coördinaten. Vanwege symmetrie zijn lineaire termen daarin nul, dus  $V = -(\rho_0/\epsilon_0)\{a_0 + (1/2)a_x x^2 + (1/2)a_y y^2 + (1/2)a_z z^2\}$  met  $a_x + a_y + a_z = 1$ . Het elektrische veld  $\vec{E} = -\nabla V = (\rho_0/\epsilon_0)(a_x x, a_y y, a_z z)$ , zodat iedere component van  $\vec{E}$  lineair van één coördinaat af hangt. Een plaatje van het elektrische veld voor  $C/A = 0,5$ :



**Vraag 2:** Een plaatje van het elektrische veld op de z-as voor  $C/A = 0,5$  in het geval van een uniforme en een Gaussische ladingsverdeling:



**Vraag 3:** De (niet-relativistische) bewegingsvergelijking ( $\vec{F} = m_e \cdot \vec{a}$ ) voor een elektron dat zich op tijdstip  $t$  op positie  $(x, y, z)$  in een expanderende uniforme ellipsoïdevormige la-



dingswolk bevindt, wordt

$$m_e \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = (q\rho_0(t)/\epsilon_0) \begin{pmatrix} a_x(t) x \\ a_y(t) y \\ a_z(t) z \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Elk van de drie vergelijkingen is van de vorm  $\ddot{x} = f(t) x$ , die onder de substitutie  $x(t) = X(t) x_0$  overgaat in  $\ddot{X} = f(t) X$  voor *elke* waarde van  $x_0$ . De begin-coördinaten van alle deeltjes zijn dus na een tijd  $t$  vermenigvuldigd met een factor  $X(t)$  (en  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ ) die weliswaar per coördinaat-as verschilt, maar wel voor alle deeltjes hetzelfde is en alleen van de tijd afhangt. Bij zo'n *homologe transformatie* blijft de ellipsoïdale vorm behouden (de *aspect ratio*  $C/A$  verandert wel) en de dichtheid uniform.

**Vraag 4:** Stel je een extreem dunne ellipsoïde voor ( $C' \ll A' = R$ ) met constante ladingsdichtheid  $\rho$ . Op een lijn met coördinaten  $(x, y)$  bevindt zich een hoeveelheid lading

$$\sigma(x, y) dx dy = dx dy \int_{z-}^{z+} \rho dz \quad (4.2)$$

waarin  $z-$  en  $z+$  de waarden van  $z$  zijn waarbij de lijn het oppervlak van de ellipsoïde snijdt:

$$z\pm = \pm C' \sqrt{1 - r^2/R^2} \text{ met } r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.3)$$

Er volgt  $\sigma(x, y) = 2\rho C' \sqrt{1 - r^2/R^2}$ . Ladingsbehoud geeft nog  $(4\pi/3)R^2 \rho C' = (4\pi/3)A^2 \rho_0 C$  zodat tenslotte

$$\sigma(x, y) = 2\rho_0 (A^2/C R^2) \sqrt{1 - r^2/R^2} \quad (4.4)$$

**Vraag 5:** Volgens de hint bij vraag 3 geldt voor ieder elektron  $x(t) = x(0)X(t)$  en  $v_x(t) = x(0)\dot{X}(t)$ . Dan volgt bijvoorbeeld

$$\langle x^2(t) \rangle = X(t)^2 \langle x(0)^2 \rangle$$

en dus

$$\begin{aligned} \varepsilon(t)^2 &= \langle x(t)^2 \rangle \langle v_x(t)^2 \rangle - \langle x(t) v_x(t) \rangle^2 \\ &= X(t)^2 \dot{X}(t)^2 \{ \langle x(0)^2 \rangle \langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) x(0) \rangle^2 \} \\ &= X(t)^2 \dot{X}(t)^2 0 = 0 \end{aligned}$$

### Verder lezen

O.J. Luiten *et al*, Phys. Rev. Lett. **93**, 94802 (2004)

C.C. Lin *et al*, Astrophys. J. **142**, 1431 (1965)

P. Musumeci *et al*, Phys. Rev. Lett. **100**, 244801 (2008)

R. Miller *et al*, Acta Crystallographia **66**, 137 (2010)

N. Browning *et al*, Current Opinion in Solid State Materials Science **16**, 23 (2012)

---

## 5. Pour some sugar on me

*C. Storm*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**6 punten**

---

Noem de hoogte waarvan je giet  $h$  en het debiet waarmee je giet  $Q$  (d.w.z.,  $Q$  is het volume aan suiker dat je per tijdseenheid uitschenkt). De dichtheid van suiker geven we aan met  $\rho$ . Allereerst bepalen we de tijd  $t_h$  die de suiker erover doet om in de bak te komen. We lossen dus op:

$$z(t_h) = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (5.1)$$

met  $g$  de grootte van de zwaartekrachtsversnelling. Even omrekenen geeft:

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.2)$$

Noem  $m_W(t)$  de massa van de suiker die op tijd  $t$  op de weegschaal ligt. Het duurt  $t_h$  voordat die begint op te lopen en dus is:

$$m_W(t) = \begin{cases} 0 & t < t_h \\ \rho Q(t - t_h) & t \geq t_h \end{cases} \quad (5.3)$$

De massa aan suiker die in de straal onderweg is, is:

$$m_S(t) = \begin{cases} \rho Q t & t < t_h \\ \rho Q t_h & t \geq t_h \end{cases} \quad (5.4)$$

De totale massa in het systeem op tijdstip  $t$  noemen we  $m_{\text{tot}}(t)$  en dit is dus de massa die zich wanneer we *stoppen* met schenken na korte tijd ( $t_h$ , om precies te zijn) in rust op de weegschaal zal bevinden.

$$m_{\text{tot}}(t) = m_W(t) + m_S(t) = \rho Q t \quad (5.5)$$

Wat geeft de weegschaal aan? Uiteraard de massa aan suiker die erop ligt, maar daarnaast is er ook een uitslag ten gevolge van de kracht die de vallende straal erop uitoefent. Die kracht is het gevolg van het niet-nul zijn van de tijdsafgeleide van de impuls  $\vec{p} = p\hat{z}$  van de bewegende suikerdeeltjes: ze komen immers tot stilstand. Samen geven die aanleiding tot een totale uitslag van de weegschaal die we  $m_{\text{app}}(t)$  (voor de apparente massa –  $m_{\text{app}}$  is dus wat de weegschaal daadwerkelijk aangeeft) noemen:

$$m_{\text{app}}(t) = m_W(t) + \frac{1}{g} \frac{dp}{dt} \quad (5.6)$$

De snelheid van alle suikerdeeltjes onderaan de straal is  $\vec{v} = -gt_h\hat{z}$ . In een tijdsinterval  $\Delta t$  zal een totale massa van  $\rho Q \Delta t$  op de weegschaal terechtkomen. Wat is gedurende dat tijdsinterval  $\Delta t$  de impulsverandering  $\Delta p$  van die suiker?

$$\Delta p = p_{\text{na}} - p_{\text{voor}} = 0 - (\rho Q \Delta t)(-gt_h) = \rho g Q t_h \Delta t \quad (5.7)$$

En dus is:

$$\frac{1}{g} \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho Q t_h \quad (5.8)$$

Dus op ieder tijdstip  $t > t_h$  (en aangezien de opgave vermeldt dat de weegschaal een gewicht ongelijk nul aangeeft, bevinden we ons in die situatie) geeft de weegschaal aan:

$$m_{\text{app}}(t) = \rho Q (t - t_h) + \rho Q t_h = \rho Q t = m_{\text{tot}}(t) \quad (5.9)$$

Met andere woorden, op ieder moment geeft de weegschaal precies het totale gewicht in het systeem aan. Wanneer men stopt met schenken op het moment dat de weegschaal 1 kg aangeeft, zal de weegschaal, nadat de suiker tot rust is gekomen, nog steeds 1 kg aangeven. Ongeacht de hoogte, ongeacht het debiet.

---

## 6. Een kernfusiereactor die Helium-3 van de maan gebruikt?

*N.J. Lopes Cardozo*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**10 punten**

---

**Vraag 1:** Omdat de kernen die moeten fuseren allebei positief geladen zijn en elkaar dus afstoten (Coulomb-interactie). Pas als de kernen zo dicht bij elkaar zijn dat ze binnen bereik van elkaars sterke kernkracht komen, trekken ze elkaar aan. Deze *Coulomb-barrière* is voor de d-t-reactie ca. 100 keV hoog. Maar bedenk dat het kwantummechanisch mogelijk is dat de reactie bij lagere energie al plaatsvindt: de deeltjes tunnelen dan door de Coulomb-barrière heen. Anders hadden de curves in bovenstaande grafiek scherpe afval vertoont bij de drempelenergie.

**Vraag 2:** Invallende deeltjes botsen met de tritiumkernen in de *target*, maar die botsing kan een gewone elastische botsing zijn, waarbij energie en impuls worden overgedragen. De werkzame doorsnede voor zo'n botsing is veel groter dan die voor de fusiereactie. De elastische botsingen leiden slechts tot opwarming van het *target*. Ten tweede: de invallende ionen botsen ook - elastisch - met de elektronen in het *target*. Ook die botsingen leiden tot opwarming van het *target*. De energie die in de opwarming van het *target* gaat zitten, gaat grotendeels verloren.

**Vraag 3:** Bij constante dichtheid en afmeting, etc., gaat het warmteverlies  $P_{\text{verlies}}$  evenredig met de temperatuur  $T \rightarrow$  teken de raaklijn met helling 1 aan de grafiek van  $\langle \sigma v \rangle$ . Voor  $T > 20$  keV neemt  $P_{\text{fusie}}$  minder snel toe dan  $P_{\text{verlies}}$ .

**Vraag 4:** Nu mogen we dus  $T$  niet meer variëren onder constant houden van  $n$ , maar houden we juist  $nT$  constant  $\rightarrow n \propto T^{-1} \rightarrow P_{\text{fusie}} \propto T^{-2} \langle \sigma v \rangle$ . Dus om het maximum van  $P_{\text{fusie}}$  te vinden, tekenen we de raaklijn met helling 2  $\rightarrow$  maximaal fusievermogen bij  $T \approx 12$  keV.

**Vraag 5:** Dezelfde truc: 40 - 50 keV.

**Vraag 6:** Bij de respectievelijke optimale brandtemperaturen is  $\langle \sigma v \rangle$  ca.  $5\times$  groter bij d-t dan bij  $d^3\text{He}$ . Daarnaast is de brandtemperatuur in  $d^3\text{He}$  ca.  $4\times$  hoger, dus de dichtheid in het kwadraat  $n^2$ , bij gelijke druk,  $16\times$  lager. De energie die vrijkomt per reactie is bijna gelijk voor de twee fusiereacties. Totaal: dezelfde reactor gestookt in  $d^3\text{He}$  zal ca.  $16 \times 5 = 80$  keer minder vermogen leveren dan wanneer d-t als brandstof wordt gebruikt. Dat betekent bijvoorbeeld dat de kWh-prijs voor  $d^3\text{He}$  ca.  $80\times$  zo hoog is, maar ook dat de kleinste reactor die een zichzelfonderhoudende reactie kan maken, veel groter en duurder is.

**Vraag 7:** Dus niet.

---

## 7. Fotonen uit een synchrotron

*H. Jordens  
Rijksuniversiteit Groningen*

**8 punten**

---

**Vraag 1:** Voor de component van de snelheid in de voorwaartse richting van het elektron geldt de Lorentz-transformatie:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} \quad (7.1)$$

En voor de richting loodrecht daarop:

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{vv'_x}{c^2}\right)} \quad (7.2)$$

(De symbolen met accent representeren grootheden in het elektronstelsel; die van de accentloze symbolen idem in het labstelsel).

In het stelsel van het elektron geldt nu  $v'_x = c \cdot \cos(\theta)$  en  $v'_y = c \cdot \sin(\theta)$ . Dan volgt:

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_y}{\gamma(v'_x + v)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \beta} \quad (7.3)$$

**Vraag 2:** Uit  $\beta = 0,995$  volgt  $\gamma \approx 10$ . Met  $\tan(1^\circ) = 0,0175$  volgt nu voor  $\theta \approx 20^\circ$ . Het percentage fotonen in de voorwaartse bundel met een tophoek van  $2^\circ$  is dan  $\frac{2 \cdot 20}{360} \cdot 100\% \approx 11\%$ . (Vergelijk dit met  $\frac{2}{360} \cdot 100\% \approx 0,6\%$  bij een uniforme verdeling.)

---

## 8. Stabiliteit en het kritisch punt

*K.K. Schakenraad en K.N. Duerloo*  
*Technische Universiteit Eindhoven en Stanford University*

**13 punten**

---

### Vraag 1:

a)  $U$  is de totale interactie-energie en is dus de som van alle naastebuurinteracties:

$$U = -\varepsilon \cdot \Sigma(\text{aantal naastebuurinteracties}) \quad (8.1)$$

$$U = -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M n_i \cdot \sum_{j=1}^z n_j \quad (8.2)$$

Hier is de factor  $\frac{1}{2}$  geïntroduceerd om te voorkomen dat alle deeltjes dubbel worden geteld.

$$U = -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^z (n_i \cdot n_j) \quad (8.3)$$

$$\langle U \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^z (n_i \cdot n_j) \right\rangle \quad (8.4)$$

Nu kunnen de sommatie en de middeling omgedraaid worden:

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^z \langle (n_i \cdot n_j) \rangle \quad (8.5)$$

Elke verdeling van  $N$  deeltjes over  $M$  cellen is even waarschijnlijk: de bezettingskans  $n_i$  van een cel hangt niet af van de bezetting  $n_j$  van zijn buurcel. De kansen kunnen dus gefactoriseerd worden. Dit leidt tot:

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^z \langle n_i \rangle \cdot \langle n_j \rangle \quad (8.6)$$

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^z \phi^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon M z \phi^2 \quad (8.7)$$

b) We gebruiken de formule van Gibbs:

$$S = -k_B \cdot \sum_{\nu} P_{\nu} \cdot \ln(P_{\nu}) \quad (8.8)$$

$P_{\nu}$  is de kans op een toestand voor het gehele systeem. Echter, aangezien de kansverdelingen van verschillende cellen niet gecorreleerd zijn, kunnen we voor elke cel individueel de entropie uitrekenen. En omdat entropie  $S$  per definitie een *additieve* en *extensieve* grootheid is en alle cellen identiek zijn, geldt:

$$S = S_{tot} = \sum_{i=1}^M S_i = M \cdot S_i \quad (8.9)$$

$$S = -Mk_B \cdot \sum_{n=0}^1 P_n \cdot \ln(P_n) \quad (8.10)$$

$$S = -Mk_B \cdot [P_0 \cdot \ln(P_0) + P_1 \cdot \ln(P_1)] \quad (8.11)$$

$$S = -Mk_B \cdot [(1 - \phi) \cdot \ln(1 - \phi) + \phi \cdot \ln(\phi)] \quad (8.12)$$

*Opmerking:* De entropie kan ook alternatief berekend worden. Omdat we aannemen dat elke verdeling van  $N$  deeltjes over  $M$  cellen even waarschijnlijk is, kunnen we met het kleinkanoniek ensemble rekenen. We mogen dus  $S = k_B \cdot \ln(\Omega)$  gebruiken, waarbij  $\Omega$  de kleinkanonieke toestandssom is. Dit leidt tot hetzelfde resultaat.

c) Combineren van opgaven a en b geeft het te bewijzen resultaat.

### Vraag 2:

a)  $\phi$  is lokaal instabiel als  $f(\phi)$  lokaal concaaf is:

$$\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2} < 0 \quad (8.13)$$

b) Los op:

$$\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2} > 0 \quad (8.14)$$

$$\frac{d^2 f}{d\phi^2} = -6\varepsilon + k_B T \cdot \left[ \frac{1}{\phi} + \frac{1}{1 - \phi} \right] \quad (8.15)$$

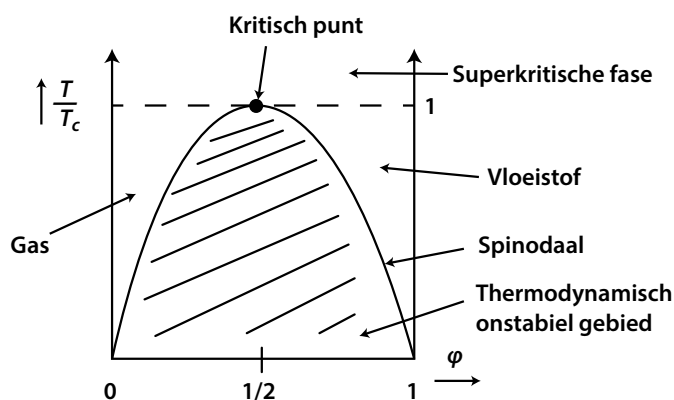
Oplossen van  $\frac{d^2 f}{d\phi^2} = 0$  geeft:

$$\phi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2k_B T}{3\varepsilon}} \quad (8.16)$$

Dus het driedimensionaal kubiek roostergas is lokaal stabiel op:

$$\phi \text{ in } \left\{ \begin{array}{l} \left[ 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2k_B T}{3\varepsilon}} \right] \\ \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2k_B T}{3\varepsilon}}, 1 \right] \end{array} \right. \quad (8.17)$$

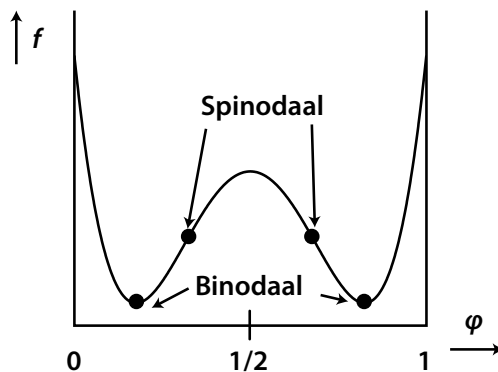
c) Zie de afbeelding hieronder.



d) De coördinaten van het kritisch punt worden gegeven door:

$$[\phi_K, T_K] = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3\varepsilon}{2k_B} \right] \quad (8.18)$$

**Vraag 3:** Ja, dit kan. Een waarde van  $\phi$  kan *lokaal* stabiel maar *globaal* instabiel zijn. Een kleine verandering van  $\phi$  naar  $\phi + \delta\phi$  en  $\phi - \delta\phi$  verlaagt de vrije energie niet, dus er zal geen *directe* fasescheiding optreden. Echter, een grotere fluctuatie naar  $\phi + \Delta\phi$  en  $\phi - \Delta\phi$  kan in bepaalde systemen wel degelijk leiden tot een fasescheiding. Deze *binodale fasescheiding* treedt pas op als een thermische fluctuatie optreedt die groot genoeg is om ‘over de vrije-energiebarrière te klimmen’. Een voorbeeld:



Alle waarden van  $\phi$  tussen de binodaal en de spinodaal in de afbeelding zijn *lokaal* stabiel maar *globaal* instabiel. Een kleine fluctuatie zal de gemiddelde vrije energie niet verlagen, maar een thermische fluctuatie die groot genoeg is om ‘over de bult in het midden heen te klimmen’ zal wel tot een fasescheiding leiden.

**Vraag 4:** Tussen een kristallijne vaste stof enerzijds en een vloeistof of gas anderzijds zit een veel fundamenteeler verschil dan alleen de dichtheid. Ze behoren namelijk niet tot dezelfde *symmetriegroep*: waar een vloeistof en een gas continue rotatiesymmetrie hebben, heeft een kristal dat slechts in enkele discrete stappen. Als de fasescheidingslijn een kritisch punt heeft, kan de lijn dus omzeild worden door er omheen te bewegen zonder een faseovergang te ondergaan. Met andere woorden, de overgang kan plaatsvinden door middel van een continu geleidelijk proces in plaats van een scherpe overgang. Echter, je kunt niet met een geleidelijke verandering van symmetriegroep veranderen. De fasescheidingslijn tussen de kristallijne fase en de vloeibare fase is dus oneindig lang.



---

## 9. De waterklok en puntwervels

*G.J.F. van Heijst*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**9 punten**

---

### Vraag 1:

- a) Massabalans:  $V_{\text{opp}} \cdot A = V \cdot A_0$ . Met  $A_0 \ll A$  vinden we:

$$V_{\text{opp}} \ll V \quad (9.1)$$

Bernoulli:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho V_{\text{opp}}^2 + \rho g H = p_a + \frac{1}{2}\rho V^2 + 0 \quad (9.2)$$

Combineren van 9.1 en 9.2 geeft:

$$V = \pm \sqrt{2gH} \quad (9.3)$$

Het minteken is hier fysisch onrealistisch.

- b) Volumeverandering per tijdseenheid:

$$\frac{d}{dt}\{\text{volume}\} = A_0 \cdot V = -A \cdot \frac{dH}{dt} \quad (9.4)$$

waarbij  $z = H$  de hoogte is van het momentane waterniveau. Op die hoogte is het doorsnede-oppervlak van het vat gelijk aan  $A(z = H) = \pi r^2$ . Met  $V_{\text{opp}} = -\frac{dH}{dt}$  en vergelijking 9.3 kunnen we 9.4 dan schrijven als:

$$V_{\text{opp}} = -\frac{dH}{dt} = \frac{A_0 \sqrt{2gH}}{\pi r^2} \quad (9.5)$$

Bij  $V_{\text{opp}} = \text{constant}$  vinden we:

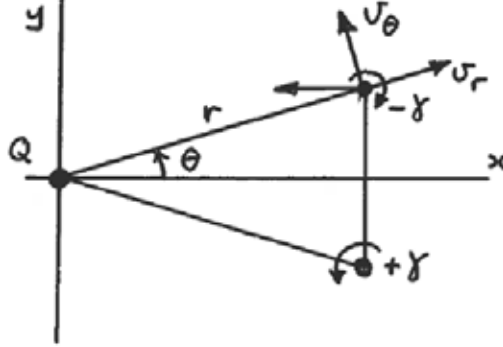
$$H = \left( \frac{\pi V_{\text{opp}}}{A_0 \sqrt{2g}} \right)^2 r^4 \quad (9.6)$$

Oftewel de straal  $r$  van het cirkelvormige doorsnede-oppervlak van het watervat moet verlopen als  $r \sim z^{1/4}$ .

### Vraag 2:

- a) Elke puntwervel induceert in de andere een snelheid gelijk aan  $\frac{\gamma}{2\pi d}$ , met  $d$  de separatieafstand. De in beide wervels geïnduceerde snelheden zijn even groot, staan loodrecht op de verbindingslijn en wijzen in de negatieve  $x$ -richting. Als gevolg hiervan gaan beide puntwervels als een geheel (de ‘puntwerveldipool’) in de negatieve  $x$ -richting transleren, met een snelheid  $V = \frac{\gamma}{2\pi d}$ .

- b) Het probleem is symmetrisch om de  $x$ -as: de trajectorie van de  $-\gamma$ -wervel is die van de  $+\gamma$ -wervel gespiegeld om de  $x$ -as. Het volstaat dus om slechts een van beide wervels te beschouwen: bijvoorbeeld die met sterkte  $-\gamma$  voor  $y > 0$ .



Voor de radiale en azimutale componenten van de snelheid geïnduceerd in dat wervelpunt schrijven we:

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} - \frac{\gamma}{4\pi r \sin \theta} \cos \theta = \frac{dr}{dt} \quad (9.7)$$

$$v_\theta = 0 + \frac{\gamma}{4\pi r \sin \theta} \sin \theta = \frac{\gamma}{4\pi r} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (9.8)$$

Combinatie van vergelijkingen 9.7 en 9.8 levert:

$$-r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{2Q}{\gamma} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \quad (9.9)$$

Oftewel:

$$\left( \frac{2Q}{\gamma} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \quad (9.10)$$

Integratie naar  $t$  levert:

$$\ln r = \frac{2Q}{\gamma} \theta - \ln(\sin \theta) + \text{constant} \quad (9.11)$$

$$\rightarrow \ln(r \sin \theta) = \frac{2Q}{\gamma} \theta + \text{constant} \quad (9.12)$$

De trajectorie van de  $-\gamma$ -wervel wordt dus gegeven door:

$$r \sin \theta = A \exp\left(\frac{2Q\theta}{\gamma}\right) \quad (9.13)$$

In  $(x, y)$ -coördinaten:

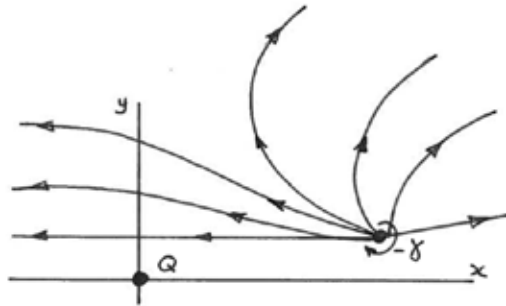
$$x \equiv r \cos \theta = A \exp\left(\frac{2Q\theta}{\gamma}\right) \cot \theta \quad (9.14)$$

$$y \equiv r \sin \theta = A \exp\left(\frac{2Q\theta}{\gamma}\right) \quad (9.15)$$

Er is een veelheid van trajectoriën mogelijk, afhankelijk van de bronsterkte  $Q$ , de wervelsterkte  $\gamma$  en de initiële separatieafstand  $d$  van de puntwervels. De extreme situaties zijn:

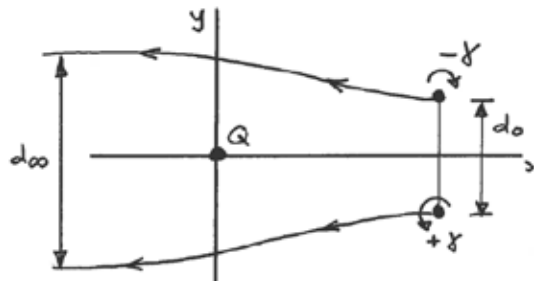
- (I)  $Q = 0 \rightarrow$  de puntwerveldipool beweegt onverstoord met constante snelheid  $V = \frac{\gamma}{2\pi d}$  langs de  $x$ -as.
- (II)  $\gamma = 0 \rightarrow$  de puntwerveldipool wordt direct ‘weggespoeld’ door de puntbron, waarbij de (niet-actieve) puntwervels in radiale richting vanuit de oorsprong wegbewegen.

Enkele mogelijke trajectoriën:



Het is interessant om te vermelden dat, ongeacht de bronsterkte  $Q$ , de puntwervels uiteindelijk *altijd* links van de oorsprong terecht zullen komen, al worden de wervels in veel gevallen eerst naar rechts gedreven. De enige uitzondering hierop is als  $\gamma = 0$  (extreme situatie II).

- c) Voor ‘zwakke’ verstoringen t.g.v. de bron ziet het pad van de dipool er zo uit:



Laten we nu de wervel met sterkte  $-\gamma$  beschouwen die boven de  $x$ -as beweegt ( $y > 0$ ). Ver van de bron af, initieel:

$$\theta \rightarrow 0 : y \rightarrow y_0 = A = \frac{1}{2}d_0 \quad (9.16)$$

Na passage van de bron, op grote afstand:

$$\theta \rightarrow \pi : y \rightarrow y_\infty = \frac{1}{2}d_0 \exp\left(\frac{2\pi Q}{\gamma}\right) \quad (9.17)$$

De separatieafstand van de puntwervels is dan:

$$d_\infty = d_0 \exp\left(\frac{2\pi Q}{\gamma}\right) \quad (9.18)$$

Dipooltranslatiesnelheid:

$$\theta \rightarrow 0 : V_0 = \frac{\gamma}{2\pi d_0} \quad (9.19)$$

$$\theta \rightarrow \pi : V_0 = \frac{\gamma}{2\pi d_\infty} = V_0 \exp\left(-\frac{2\pi Q}{\gamma}\right) \quad (9.20)$$

---

## 10. De drijvende kracht achter de laser-plasma-deeltjesversneller

*J. van Tilborg en C. Benedetti  
Lawrence Berkeley National Laboratory*

**11 punten**

---

De student zal de Lorentz-vergelijking moeten kunnen opschrijven voor het momentum van het elektron in de  $z$ -richting:

$$\frac{dp_z}{dt} = -e \left( \vec{v} \times \vec{B} \right)_z = -ev_x B_y \quad (10.1)$$

Puur uit een vectoranalyse zou het duidelijk moeten zijn dat er geen kracht is in de  $y$ -richting, zodat  $v_y = p_y = u_y = 0$ . Vergelijking 10.1 kan herschreven worden met behulp van de magnetische vectorpotentiaal  $\vec{A} = (A, 0, 0)$  als:

$$\frac{dp_z}{dt} = -ev_x B_y = -ev_x \frac{\partial A}{\partial z} \quad (10.2)$$

Aangezien  $v_x = p_x/(m_0\gamma)$ , kan vergelijking 10.2 herschreven worden als:

$$\frac{dp_z}{dt} = -e \frac{p_x}{m_0} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial A}{\partial z} \quad (10.3)$$

Met behulp van de normalisaties  $A = am_0c/e$ ,  $p_z = u_z m_0 c$ ,  $p_x = u_x m_0 c$ , en  $u_x = a$ , kan vergelijking 10.3 uitgedrukt worden als:

$$\frac{du_z}{dt} = -c\gamma^{-1} a \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{1}{2} c (1 + a^2 + u_z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(a^2)}{\partial z} \quad (10.4)$$

We zullen de snelle op en neer veldoscillaties binnen de laserpuls nu buiten beschouwing laten, zodat we de term  $a^2$  kunnen vervangen met een laserpuls gemiddelde  $a^2 \rightarrow \langle a^2 \rangle$ . Vergelijking 10.4 zal er dan uitzien als:

$$\frac{du_z}{dt} = -\frac{1}{2} c (1 + \langle a^2 \rangle + u_z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \langle a^2 \rangle}{\partial z} \quad (10.5)$$

Voor een arriverende laserpuls is de term  $\partial \langle a^2 \rangle / \partial z$  negatief, zodat de rechterzijde van vergelijking 10.5 een positieve bijdrage ondervindt: in de richting weg van de laserpuls. Een extra inzicht: terwijl de beweging van het elektron in de  $x$ -richting evenredig is met de piek laserpuls veldsterkte  $a_0$ , is de longitudinale beweging in de  $z$ -richting (weg van de laserpuls) evenredig met  $a_0^2$ . Dit illustreert het feit dat de *ponderomotive force* een non-lineaire kracht is, alleen meetbaar voor extreem krachtige laserpulsen.

---

## 11. Positiemeting van een wafer stage

B. van der Pasch en T. de Kort  
ASML

8 punten

---

**Vraag 1:** Een hele periode van het interferentiepatroon wordt doorlopen in  $dx = \frac{\lambda}{4}$  (de bundel doorloopt de afstand van interferometer naar *wafer stage* 4 keer). De fase-meting verdeelt een periode in 250 stappen. Dit leidt tot een resolutie  $dx = \frac{\lambda}{4 \cdot 250} = 0,633$  nm.

**Vraag 2:** De modulatie diepte van het signaal is gedefinieerd als  $\frac{I_{\text{amp}}}{I_{\text{evenwichtsstand}}} \cdot 100\%$ . Voor een signaal met  $I_1 < I_2$  leidt dit tot  $M = \frac{I_1}{I_2} \cdot 100\%$ .

De polarisator werkt op het elektrisch veld, d.w.z. op  $\sqrt{I}$ . Beide bundels hebben een  $E$ -vector met amplitude  $E$ . De nominale hoek van de polarisator is  $45^\circ$ , de fout daarop is hoek  $\phi$ .

$E_1$  in polarisatierichting =  $E \cos(45^\circ + \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot E \cdot [\cos \phi - \sin \phi]$ ;  $I_1 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot [\cos \phi - \sin \phi]^2$

$E_2$  in polarisatierichting =  $E \cos(45^\circ - \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot E \cdot [\cos \phi + \sin \phi]$ ;  $I_2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot [\cos \phi + \sin \phi]^2$

Algebraïsch oplossen van de modulatie diepte  $\frac{I_1}{I_2} = 0,99$  (1% verlies) geeft dan een fout van:

$$\phi = \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{0,99}}{1 + \sqrt{0,99}}\right) \quad (11.1)$$

Dit komt neer op een fout van  $\sim 2,5$  mrad.

**Vraag 3:** De polarisatie van iedere bundel draait  $8^\circ$ , wat leidt tot een  $\sim 2\%$  lekkage van intensiteit in de verkeerde tak. Dit ‘gelekte’ licht ondergaat slechts de helft van de faseverschuiving, omdat het slechts één maal de weg naar de *stage* aflegt. Dit percentage gelekte licht is gelijk voor beide takken. Hierdoor ontstaat een kleine modulatie in de totale intensiteit, maar geen fout in de fase detectie.

**Vraag 4:** Uit de Edlen-formule kan men afleiden  $\frac{dn}{dT} \cong -10^{-6} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}}\right]$ .

Voor een verstoring van 10 mK leidt dit tot  $dn \approx -10^{-8}$ .

Uit het verband tussen  $\lambda$  en  $n$  en het verband tussen  $x$  en  $\lambda$  kan worden herleid dat  $\frac{dx}{x} = -\frac{dn}{n}$ .

Met  $n \approx 1$  (brekingsindex van lucht)  $\rightarrow dx = -dn \cdot x$ , waarbij  $x$  de lengte is waarover de verstoring zich voordoet: 0,2 m.

De resulterende meetfout is  $dx = 10^{-8} \cdot 0,2 \text{ m} = 2 \text{ nm}$ .

**Vraag 5:** Alle gaseigenschappen die de brekingsindex beïnvloeden, veroorzaken een afwijking: druk, luchtvochtigheid, gassamenstelling.

**Vraag 6:** Op de +150 mm-positie (aan de rand van de *wafer*) heeft de interferometerbundel meer tijd nodig om de weg naar de *wafer stage* af te leggen: voor 150 mm scheelt dit  $t = \frac{\text{afstand}}{\text{lichtsnelheid}} = 0,5$  ns. In deze 0,5 ns heeft de *wafer stage* bij 1 m/s reeds een extra afstand afgelegd van 0,5 nm.

---

## 12. Het GHZ-experiment

*S.J.J.M.F. Kokkelmans*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**12 punten**

---

**Vraag 1:** Indien *niet* verstrengeld:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_0\rangle \quad (12.1)$$

met  $|\Psi_i\rangle = C_{i,0}|0\rangle + C_{i,1}|1\rangle$ . In het algemeen:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & C_{000}|000\rangle + C_{001}|001\rangle \\ & + C_{010}|010\rangle + C_{011}|011\rangle \\ & + C_{100}|100\rangle + C_{101}|101\rangle \\ & + C_{110}|110\rangle + C_{111}|111\rangle \end{aligned} \quad (12.2)$$

Als niet verstrengeld, dan geldt bijvoorbeeld:

$$C_{000} \cdot C_{101} = C_{100} \cdot C_{001} \quad (12.3)$$

Voor gegeven  $|\Psi\rangle$  geldt echter:

$$C_{000} \cdot C_{101} = -\frac{1}{4} \neq C_{100} \cdot C_{001} = 0 \quad (12.4)$$

Dus  $|\Psi\rangle$  is verstrengeld.

**Vraag 2:** Meetuitkomsten genoteerd als  $(x_2, x_1, x_0)$ :

$(x_2, x_1, x_0)$	kans
(0,0,0)	1/4
(1,1,0)	1/4
(0,1,1)	1/4
(1,0,1)	1/4

**Vraag 3:**

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 = 0 \\ (1, 1, 0) &\rightarrow x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 = 0 \\ (0, 1, 1) &\rightarrow x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 = 0 \\ (1, 0, 1) &\rightarrow x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 = 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

Dus  $x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 = 0$ .

**Vraag 4:**

$$\begin{aligned}
 (\text{H} \otimes \text{H} \otimes \text{I})|\Psi\rangle &= \frac{1}{4}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle \\
 &\quad - |000\rangle + |010\rangle + |100\rangle - |110\rangle \\
 &\quad - |001\rangle + |011\rangle - |101\rangle + |111\rangle \\
 &\quad - |001\rangle - |011\rangle + |101\rangle + |111\rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(|111\rangle + |100\rangle + |010\rangle - |001\rangle)
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

Dus nu is inderdaad  $x_2^{\text{H}} \oplus x_1^{\text{H}} \oplus x_0 = 1$ .

**Vraag 5:** *Diverse argumenten mogelijk.* De uitkomst van een hypothetische meting wordt vergeleken met de uitkomst van een daadwerkelijke meting  $\rightarrow$  er wordt een ‘element van realiteit’ toegekend aan *qubit* 2. Dat is op z’n minst twijfelachtig.

**Vraag 6:** *Meer manieren mogelijk: punten voor correct aantonen van strijdigheid.*

$$\begin{aligned}
 x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 &= 0 \\
 x_2^{\text{H}} \oplus x_1^{\text{H}} \oplus x_0 &= 1 \\
 x_2 \oplus x_1^{\text{H}} \oplus x_0^{\text{H}} &= 1 \\
 \frac{x_2^{\text{H}} \oplus x_1 \oplus x_0^{\text{H}} = 1 \oplus}{0 = 1} &
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

Dus het realistische standpunt is niet houdbaar.

