

# POW 2013

## OPGAVEN



Mede mogelijk gemaakt door: nederlandse



PANalytical



natuurkundige vereniging



Stichting Physica



Universiteit Leiden



rijksuniversiteit groningen



# Jij en de Nederlandse Natuurkundige Vereniging?

De Nederlandse Natuurkundige Vereniging (NNV) is de beroepsvereniging voor fysici in Nederland. Leden zijn werkzaam in onderwijs, onderzoek of bedrijfsleven. Ook veel studenten zijn lid van de NNV. De NNV subsidieert voor leden studentenactiviteiten als reizen, symposia en PION.

Voor slechts € 10,50 per jaar kun je als student NNV-lid worden. Voor tweedejaars studenten is het lidmaatschap zelfs 1 jaar gratis. Als NNV-lid ontvang je elke maand het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN). Je kunt ook tegen gereduceerd tarief naar het jaarlijkse symposium FYSICA. Zo blijf je op de hoogte van ontwikkelingen in natuurkundig Nederland. Bovendien krijg je, als natuurkundige in spe, een beeld van jouw mogelijkheden in de toekomst.

Kijk voor meer informatie over de NNV en het NTvN op [www.nnv.nl](http://www.nnv.nl) op [www.ntvn.nl](http://www.ntvn.nl)

Meld je aan als lid van de NNV via het webformulier op [www.nnv.nl](http://www.nnv.nl)

nederlandse



natuurkundige  
vereniging

# Natuurlijk!

---

## Voorwoord

---

Beste PION-deelnemer,

Het moment is aangebroken waarop jullie je als team gaan storten op twaalf uitdagende fysicavraagstukken. Dit jaar hebben wij als eerste Eindhovense commissie de eer om een zeer divers en hopelijk erg leerzaam PION voor jullie neer te zetten. Hiertoe zijn de opgaven gemaakt in samenwerking met professoren uit het hele land. Er is ook een opgave geleverd door hightechbedrijf ASML en er zijn zelfs twee bijdragen vanuit de V.S. geleverd. We hebben er vertrouwen in dat jullie je deze dag zullen herinneren als een topdag.

Veel succes!

*Sten Reijers, Maarten Sebregts, Jelle Goertz, Bart Klarenaar, Koen Schakenraad en Guus Vermijs (PION-commissie 2013)*

---

## Reglement

---

- Er zijn 12 opgaven, waarmee je in totaal 120 punten kunt verdienen.
  - Niet iedere opgave is evenveel punten waard. Het maximaal aantal punten dat per opgave te behalen is, kun je op de volgende bladzijde en in de kop van iedere opgave zelf vinden.
  - Jullie hebben 3 uur de tijd.
  - Maak iedere opgave op een apart vel en schrijf bovenaan ieder vel je teamnaam, en de titel en het nummer van de opgave.
  - Het is niet toegestaan gebruik te maken van boeken, aantekeningen, etc., anders dan een BINAS.
  - Het is niet toegestaan (over de opgaven) te communiceren (internet, mobiel, etc.) met anderen dan teamgenoten.
  - Het is toegestaan om gebruik te maken van een grafische rekenmachine van het type dat ook is toegestaan tijdens het examen van de middelbare school (Ti-83, Ti-84 of een vergelijkbaar type).
  - De aanwezigheid van mobiele telefoons wordt gedoogd, mits deze niet gebruikt worden anders dan voor noodgevallen.
-

**Colofon**

Dit opgavenboekje is een uitgave van de  
PION-commissie 2013.

*e-mail:* [pion@vdwaals.nl](mailto:pion@vdwaals.nl)

*Internet:* [www.vdwaals.nl/pion](http://www.vdwaals.nl/pion)

---

## Inhoudsopgave

---

Opgave	Punten		Pagina
1	12	Een diabolo als jojo	5
2	8	Moleculair spectrum	6
3	10	Majorana-deeltjes	8
4	13	Ultrakorte elektronenpulsen	10
5	6	Pour some sugar on me	12
6	10	Een kernfusiereactor die Helium-3 van de maan gebruikt?	13
7	8	Fotonen uit een synchrotron	16
8	13	Stabiliteit en het kritisch punt	17
9	9	De waterklok en puntwervels	20
10	11	De drijvende kracht achter de laser-plasma-deeltjesversneller	22
11	8	Positiemeting van een wafer stage	24
12	12	Het GHZ-experiment	27

---

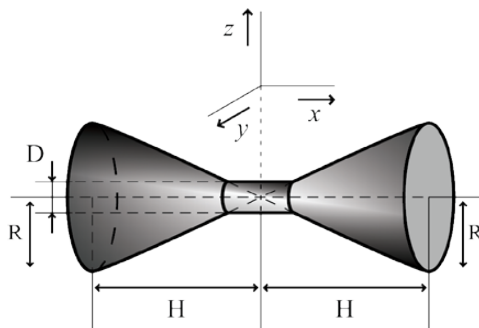
## 1. Een diabolo als jojo

R. Engeln  
Technische Universiteit Eindhoven

12 punten

---

Een diabolo is opgebouwd uit twee kegels, die aan elkaar vastgemaakt zijn met een cilindervormig busje (zie figuur 1.1). Het busje heeft een buitendiameter  $D$  en mag als massaloos beschouwd worden. Beide kegels hebben een basis met straal  $R$  en een hoogte  $H$ . De dichtheid,  $\rho(x)$ , van de kegels neemt lineair af naar de top:  $\rho(x) = \left(\frac{|x|+H}{H}\right) \rho_0$ .



**Figuur 1.1:** Een diabolo, bestaande uit twee kegels, aan elkaar bevestigd door een busje.

Er wordt een touwtje, dat ook massaloos mag worden verondersteld, met lengte  $L$ , om het busje gewikkeld. Het touwtje wordt aan één kant vastgehouden. Vervolgens wordt de diabolo losgelaten en rolt hij langs het touwtje naar beneden. Op het moment dat het touwtje afgerold is, raakt de diabolo de grond. De diabolo slipt op dat moment,  $t = 0$ , volledig en draait dan dus rond zonder voorwaartse snelheid. Door de wrijving met de grond, gaat de diabolo naast roteren ook transleren. Op tijdstip  $t = T_1$  gaat de beweging over in rollen zonder te slippen. De valversnelling is  $g$  en de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen diabolo en grond is  $\mu_k$ .

**Vraag 1:** Bereken het traagheidsmoment  $I$  van de diabolo om de  $x$ -as. Druk deze uit in de massa van de diabolo en de straal  $R$ .

**Vraag 2:** Bereken de hoeksnelheid waarmee de diabolo roteert op het moment dat deze de grond raakt. Druk de hoeksnelheid uit in de gegeven grootheden.

Neem nu aan dat de diabolo roteert met hoeksnelheid  $\omega_0$  op het moment  $t = 0$  dat deze de grond raakt.

**Vraag 3:** Hoe groot is de afstand waarover de diabolo beweegt, voordat deze op  $t = T_1$  gaat rollen zonder te slippen? Druk uw antwoord uit in de gegeven grootheden.

**Vraag 4:** Hoeveel arbeid verricht de wrijvingskracht over de afstand die de diabolo aflegt tussen  $t = 0$  en  $t = T_1$ ? Druk uw antwoord uit in de gegeven grootheden.

---

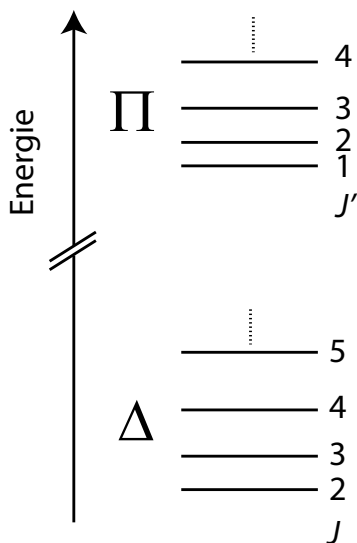
## 2. Moleculair spectrum

*S.Y.T. van de Meerakker  
Radboud Universiteit Nijmegen*

**8 punten**

---

Beschouw het molecuul NH dat uit een stikstof- en een waterstofatoom bestaat. Net als atomen hebben moleculen gekwantiseerde energetische toestanden. Voor NH is de energie-structuur schematisch weergegeven in figuur 2.1. Er zijn twee elektronische toestanden, die zijn gelabeld met de Griekse hoofdletters  $\Delta$  en  $\Pi$ . Elk van deze elektronische toestanden bevat een serie rotatietoestanden die zijn gelabeld met het kwantumgetal  $J$ . In de  $\Delta$ - en  $\Pi$ -toestand is de laagste waarde van  $J$  die kan voorkomen respectievelijk 2 en 1. De energie van de rotatietoestanden wordt gegeven door  $BJ(J+1)$ , waarin de factor  $B$  de rotatieconstante van de elektronische toestand is. De waarde van  $B$  is omgekeerd evenredig met het traagheidsmoment van het molecuul.



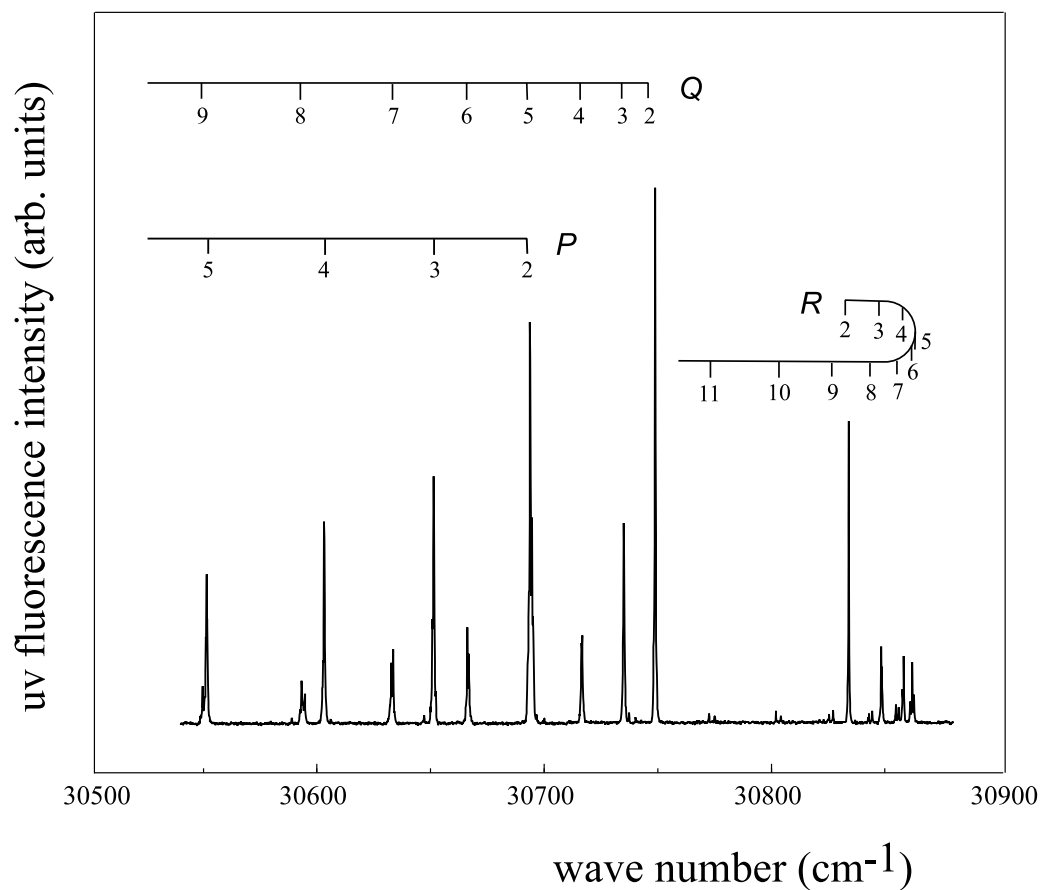
**Figuur 2.1:** Schematische weergave van de rotatietoestanden in de elektronische  $\Pi$ - en  $\Delta$ -toestanden van NH.

In figuur 2.2, op de volgende pagina, zie je een spectrum van de  $(\Delta, J \rightarrow \Pi, J')$ -overgangen in NH (de gebruikte energie-eenheid *wavenumber* ( $\text{cm}^{-1}$ ) correspondeert met de energie van een foton dat een golflengte heeft van 1 cm). Verschillende rotationele overgangen zijn zichtbaar, die zijn aangeduid met de letters P, Q en R. De P-, Q- en R-lijnen zijn overgangen waarvoor respectievelijk geldt  $\Delta J = -1, 0$  en  $+1$ . Elke lijn in het spectrum wordt verder aangeduid met de waarde van  $J$  in de  $\Delta$ -toestand.

**Vraag 1:** Beredeneer aan de hand van de R-lijnen in het spectrum of de rotationele constante  $B_{\Pi}$  van de  $\Pi$ -toestand groter of kleiner is dan de rotationele constante  $B_{\Delta}$  van de  $\Delta$ -toestand.

**Vraag 2:** Geef op basis van dit spectrum een schatting voor de verhouding  $B_{\Pi}/B_{\Delta}$ .

**Vraag 3:** Hoe zal dit spectrum kwalitatief veranderen als we het H-atoom in NH vervangen door een D-atoom (deuterium-atoom)? Ga vooral in op de relatieve posities van de verschillende lijnen in het spectrum. Ga ervan uit dat de evenwichtsafstand tussen beide kernen hetzelfde is voor NH en ND.



**Figuur 2.2:** Het spectrum van de  $(\Delta, J \rightarrow \Pi, J')$ -overgangen van NH.



---

### 3. Majorana-deeltjes

*C.W.J. Beenakker*  
*Universiteit Leiden*

**10 punten**

---

In 2012 werden twee deeltjes ontdekt: het Higgs-deeltje in Genève en het Majorana-deeltje in Delft. Over de Delftse ontdekking gaat deze opgave.

De ladingsdragers in een elektrische geleider kunnen negatief geladen elektronen zijn of positief geladen gaten. Een elektron kan een gat annihileren (= opheffen). We noemen het gat daarom het antideeltje van het elektron. Een Majorana-deeltje is zijn eigen antideeltje, dus twee Majorana-deeltjes kunnen alleen blijven bestaan als ze ruimtelijk gescheiden zijn. In het Delftse experiment werden twee Majorana-deeltjes gevangen aan de beide uiteinden van een dunne supergeleidende draad.

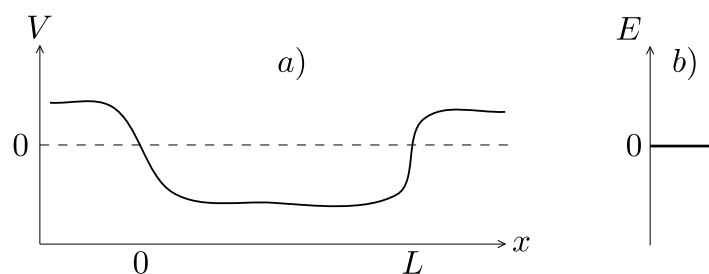
**Vraag 1:** Wat denk je dat de lading van het Majorana-deeltje is, in verhouding tot de elektronlading  $-e$ ? Beargumenteer je antwoord.

De kwantummechanische golffuncties van het elektron,  $\psi_e(x)$ , en van het gat,  $\psi_g(x)$ , in de dunne draad (langs de  $x$ -as) voldoen bij gegeven energie  $E$  aan twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen,

$$\begin{cases} -eV(x)\psi_e(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_g(x) = E\psi_e(x) \\ +eV(x)\psi_g(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_e(x) = E\psi_g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

De golfsnelheid is  $v$  en  $V(x)$  is de elektrische potentiaal in de draad. Een oplossing van vergelijking 3.1 beschrijft een nieuw soort deeltje, samengesteld uit een elektron en een gat.

**Vraag 2:** Bewijs de deeltje-antideeltje-symmetrie: als er een oplossing is van vergelijking 3.1 bij energie  $+E$ , dan is er ook een oplossing bij energie  $-E$ .



**Figuur 3.1:** a) Het verloop van de elektrische potentiaal  $V(x)$  langs de draad. b) Het energiespectrum van de draad in de limiet  $L \rightarrow \infty$ .

Om een Majorana-deeltje te vinden zoeken we een oplossing van vergelijking 3.1 bij energie  $E = 0$ . Dit samengestelde deeltje is dan zijn eigen antideeltje. De potentiaal  $V(x)$  ziet eruit als in figuur 3.1a, de precieze vorm doet er niet toe, als  $V(x)$  maar negatief is in de draad en

positief erbuiten. Het linker uiteinde van de draad is op  $x = 0$ , het rechter uiteinde op  $x = L$ . We vereenvoudigen het probleem een beetje door de limiet  $L \rightarrow \infty$  te nemen.

**Vraag 3:** Bewijs dat het Majorana-deeltje gegeven is door

$$\psi_e(x) = C \exp\left(\frac{se}{\hbar v} \int_0^x V(x') dx'\right), \quad \psi_g(x) = is\psi_e(x), \quad (3.2)$$

met  $C$  een willekeurige constante en  $s$  gelijk aan  $+1$  of  $-1$ . Welk van beide waarden van  $s$  is van toepassing op het Majorana-deeltje bij het linker uiteinde van de draad? Waarom?

**Vraag 4:** We hebben nu voor  $L \rightarrow \infty$  een paar Majorana-deeltjes gevonden bij  $E = 0$ . Het energiespectrum van de draad ziet er dus uit als in figuur 3.1b. Schets het energiespectrum als  $L$  wel groot is, maar niet oneindig groot.

---

#### 4. Ultrakorte elektronenpulsen

*E.J.D. Vredenburg  
Technische Universiteit Eindhoven*

**13 punten**

---

Elektronenmicroscopie en elektronendiffractie zijn twee technieken waarmee de structuur en de samenstelling van materialen wordt onderzocht. Sinds enige tijd zijn onderzoekers bezig om met deze technieken naast atomaire plaatsresolutie ook ultrasnelle tijdsresolutie te bereiken. Daarvoor zijn korte, intense elektronenpulsen van hoge kwaliteit ('helderheid') nodig. Elektronen stoten elkaar echter af en dat maakt het moeilijk veel elektronen dicht op elkaar te pakken. In deze opgave onderzoeken we de eigenschappen van uniforme, ellipsoïdale elektronenpakketjes, d.w.z. elektronenwolkjes waarvan de ladingsdichtheid constant is binnen een omwentelingsellips; daarbuiten is de ladingsdichtheid nul.

**Vraag 1:** Beschouw een ellipsoïdevormige ladingswolk die in Cartesische coördinaten wordt beschreven door

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} \leq 1 \quad (4.1)$$

waarin  $A$  en  $C$  lengtematen zijn. Binnen de wolk is de ruimteladingsdichtheid  $\rho$  constant en gegeven door  $\rho_0$ ; daarbuiten bevindt zich geen lading en is  $\rho = 0$ . Volgens de wetten van Maxwell voldoet de elektrostatiche potentiaal  $V$  aan de wet van Poisson,

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \quad (4.2)$$

en uit  $V$  kan het elektrische veld  $\vec{E}$  worden berekend.

Laat zien dat binnen de wolk elke component van het elektrische veld lineair van één coördinaat afhangt. Schets richting en grootte van het elektrische veld op de rand van de wolk in het  $xz$ -vlak voor het geval  $C < A$ .

**Vraag 2:** Schets het elektrische veld voor punten op de  $z$ -as, zowel binnen als buiten de wolk. Schets in dezelfde figuur een intuïtieve benadering van het elektrische veld voor diezelfde punten in het geval dat de ladingsverdeling niet uniform ellipsoïdaal maar Gaussisch was, te weten:

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} \right) \right] \quad (4.3)$$

**Vraag 3:** Onder invloed van het interne elektrische veld spat het wolkje elektronen uit elkaar. Laat zien dat uniforme ellipsoïdale elektronenpakketjes daarbij altijd uniform en ellipsoïdaal blijven (de *aspect ratio*  $C/A$  mag wel veranderen). Ga er voor het gemak van uit dat op tijdstip  $t = 0$  het elektronenwolkje de vorm van vergelijking 4.1 heeft en alle elektronen dan stilstaan. *Hint:* laat zien dat voor een elektron op beginpositie  $(x_0, y_0, z_0)$  de coördinaten op latere tijd  $t$  voldoen aan  $x(t) = x_0 X(t)$  (waarin  $X(t)$  een nader te bepalen functie is die alléén van de tijd afhangt) en iets vergelijkbaars voor  $y(t)$  en  $z(t)$ . Leg dan uit waarom dit betekent dat een ellipsoïdaal lichaam altijd ellipsoïdaal blijft.

**Vraag 4:** Het maken van uniforme ellipsoïdale elektronenpakketjes in de vrije ruimte is verre van triviaal. Het is echter wel mogelijk om m.b.v. lasers een oppervlakteladingsdichtheid  $\sigma(x, y)$  vrij te maken op het oppervlak van een vlakke fotokathode (bijvoorbeeld een vlakke koperplaat) en die lading uit de plaat te trekken m.b.v. een versnelveld. Als  $\sigma(x, y)$  daarbij goed gekozen wordt, ontwikkelt deze ladingspannekoek zich vanzelf tot een uniforme ellipsoïdale elektronenwolk. De juiste keuze voor de ladingsverdeling komt erop neer dat deze een extreme, ‘platgeslagen’ uniforme ellipsoïdale puls voorstelt, d.w.z. een ellipsoïdaal lichaam volgens uitdrukking 4.1 met lengtes  $C'$  en  $A'$  waarvoor geldt  $0 \approx C' \ll A'$ . Neem nu aan dat de oppervlakteladingsdichtheid op de kathode nul is buiten  $x^2 + y^2 = R^2$  (dus  $A' = R$ ) en in totaal evenveel lading bevat als het pakketje van vergelijking 4.1. Geef dan een uitdrukking voor  $\sigma(x, y)$  in termen van  $x, y, R, A, C$  en  $\rho_0$ .

**Vraag 5:** De kwaliteit van een elektronenpuls wordt gekarakteriseerd door zijn zgn. emittantie  $\varepsilon$ : hoe kleiner de emittantie, des te beter het wolkje op een *sample* gefocust kan worden, bijvoorbeeld m.b.v. elektrostatische lenzen. Voor de  $x$ -emittantie geldt als uitdrukking

$$\varepsilon^2 = \langle x^2 \rangle \langle v_x^2 \rangle - \langle x v_x \rangle^2 \quad (4.4)$$

waarin  $v_x$  de snelheid van een elektron in de  $x$ -richting is, en  $\langle \dots \rangle$  betekent dat er gemiddeld wordt over de ladingsverdeling. Ter verduidelijking:  $\langle x^2 \rangle$  is dus de variantie van de positie van een elektron. Op tijdstip  $t = 0$  is de emittantie van de ideale uniforme ellipsoïdale elektronenwolk uit vraag 3 gelijk aan nul omdat alle lading dan stilstaat.

Laat zien dat voor deze ideale wolk de emittantie op ieder tijdstip nul is. (Hieruit volgt dat uniforme ellipsoïdale elektronenwolven bijna-ideale eigenschappen hebben voor elektron-optische systemen).

---

**5. Pour some sugar on me**

*C. Storm*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**6 punten**

---

Je giet van enige hoogte, met een constante uitstroom, suiker op een weegschaal. Op zeker moment geeft de weegschaal precies 1 kilogram aan en op dat moment houd je op met schenken.

**Vraag:** Wat geeft de weegschaal aan wanneer ook de suiker die nog onderweg was naar beneden op de weegschaal tot rust gekomen is? Je mag de wrijving verwaarlozen en de suiker eenparig versneld (zonder botsingen) veronderstellen.

---

## 6. Een kernfusiereactor die Helium-3 van de maan gebruikt?

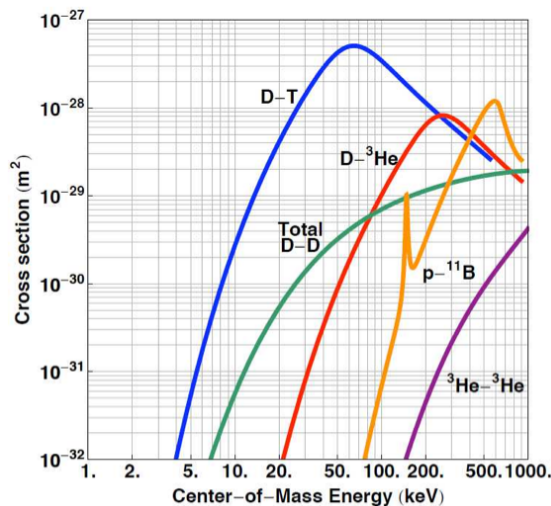
N.J. Lopes Cardozo  
Technische Universiteit Eindhoven

10 punten

---

Met enige regelmaat verschijnen er berichten in het nieuws over het opwekken van energie uit Helium-3 met behulp van een kernfusiereactie. Enige probleem: Helium-3 moet je van de maan halen. Maar daar is het de protagonisten van deze vorm van energieopwekking juist om te doen: ze willen naar de maan! In deze opgave kijken we hoe realistisch het opwekken van energie met Helium-3 eigenlijk is, dan kunnen we daarna de regering adviseren over het koloniseren van de maan.

Om te beginnen: wat is kernfusie? Bij versmelting van de kernen van lichte elementen, zoals waterstof, komt energie vrij. Dit is het proces dat de zon en andere sterren van energie voorziet. Kunnen we dit proces gebruiken voor onze energievoorziening? Op papier kan kernfusie voor miljoenen jaren energie leveren in reactoren die veilig en schoon zijn, geen CO<sub>2</sub> of andere afvalstoffen uitstoten en geen langlevend radioactief afval maken. Als het makkelijk was om fusie-energie op te wekken, zou het dan ook al lang op grote schaal worden gebruikt. Maar het is niet makkelijk en dat komt in de eerste plaats doordat de fusiereactie pas optreedt als de kernen die moeten fuseren met een hoge energie op elkaar botsen. Onderstaande grafiek geeft de werkzame doorsnede,  $\sigma$ , van enkele fusiereacties als functie van de energie waarmee de deeltjes botsen.



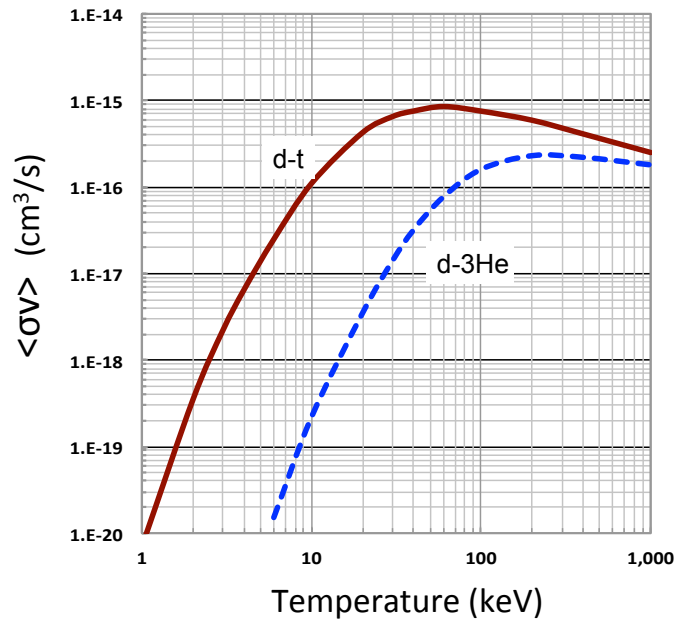
**Figuur 6.1:** Werkzame doorsnede van enkele fusiereacties als functie van de botsingsenergie (bron: <http://iec.neep.wisc.edu>).

**Vraag 1:** Waarom is er zo'n hoge energie nodig om de fusiereactie te laten plaatsvinden?

**Vraag 2:** Door een bundel deuterium-ionen met een energie van zo'n 50 - 100 keV op een *target* met tritium te laten vallen, kunnen we dus fusiereacties laten plaatsvinden. Dat werkt, maar het blijkt dat dit principieel geen netto-energiewinst kan opleveren. Waarom niet?

Omdat het schieten van een bundel op een *target* dus geen energie kan opleveren, moeten we in de reactor de brandstof – die bij die hoge temperatuur in de plasma-toestand is (dus alle deeltjes zijn volledig geïoniseerd) – opsluiten, zodat de deeltjes langdurig bij elkaar zijn, elkaar vaak tegenkomen en dus vaak de kans hebben met elkaar te fuseren. Nu is er sprake van een thermische snelheidsverdeling, het plasma heeft een temperatuur,  $T$ . Dat opsluiten kan met een magnetisch veld. Dit vervult twee functies: 1) het houdt het plasma bij elkaar middels de Lorentzkracht en 2) het vermindert de warmtegeleiding van het plasma met zo'n 12 orden van grootte, waardoor het plasma zijn eigen isolator wordt en makkelijker heet gehouden kan worden.

Om de totale reactiesnelheid te berekenen, wordt het product van de deeltjessnelheid en de werkzame doorsnede gemiddeld over de snelheidsverdeling,  $\langle \sigma v \rangle$ . Deze staat in de volgende grafiek gegeven als functie van de temperatuur van het plasma. Merk op dat de temperatuur,  $T$ , wordt gegeven in keV: bedoeld wordt  $k_B T$ , waarbij  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  de Boltzmann-constante is. Dus 1 keV correspondeert met ruim  $10^7$  Kelvin.



**Figuur 6.2:** Het product van de deeltjessnelheid en de werkzame doorsnede, gemiddeld over de snelheidsverdeling,  $\langle \sigma v \rangle$ , als functie van de plasmatemperatuur  $T$ .

De vermogensdichtheid – het door fusiereacties opgewekte vermogen per volume-eenheid – is gegeven door:

$$P_{\text{fusie}} \propto \langle \sigma v \rangle n^2 E_{\text{fusie}} \quad (6.1)$$

waarbij  $n$  de dichtheid van de ionen in het plasma is (aantal ionen per kubieke meter) en  $E_{\text{fusie}}$  de energie die vrijkomt per fusiereactie. We nemen even aan dat de dichtheden van de fuserende deeltjes gelijk zijn.

Er is ook energieverlies,  $P_{\text{verlies}}$ , omdat het hete plasma energie afstaat aan de buitenwereld door geleiding (dus evenredig met het temperatuurverschil). De verhouding tussen  $P_{\text{fusie}}$

en  $P_{\text{verlies}}$  wordt  $Q$  genoemd:  $Q = P_{\text{fusie}}/P_{\text{verlies}}$ . Deze *power multiplication* willen we nu maximaliseren. We bekijken de reactie die het hardst loopt, die van de waterstofisotopen deuterium ( $d = {}^2\text{H}$ ) en tritium ( $t = {}^3\text{H}$ ):



**Vraag 3:** Bij welke plasmatemperatuur is  $Q$  maximaal voor de reactor die de d-t-reactie gebruikt? Je kunt voor deze en de volgende vragen figuur 6.2 gebruiken.

Het magneetveld moet het plasma ook ‘op zijn plaats houden’. Dat betekent dat de druk van de brandstof ( $p \propto nk_B T$ ) die je kunt toelaten is gelimiteerd door de druk van het magneetveld: het plasma mag niet sterker worden dan de magnetische opsluiting.

**Vraag 4:** Bij welke plasmatemperatuur krijg je het maximale fusievermogen uit een d-t-reactor die je bij constante (namelijk maximale) druk bedrijft?

Nu gaan we in dezelfde reactor (zelfde druklimiet) Helium-3 stoken:



**Vraag 5:** Bij welke temperatuur is het fusievermogen nu maximaal?

**Vraag 6:** Hoe verhoudt dit vermogen zich tot het maximale vermogen dat dezelfde reactor levert als er d-t in wordt gestookt?

**Vraag 7:** Wat adviseer je de regering: snel naar de maan om Helium-3 te scoren?



---

## 7. Fotonen uit een synchrotron

H. Jordens  
Rijksuniversiteit Groningen

**8 punten**

---

Een geladen deeltje dat in een cirkelvormige versneller (bijvoorbeeld een *synchrotron*) ronddraait, zendt fotonen uit in het vlak van de versneller. In het stelsel van het deeltje worden de fotonen in alle richtingen uitgezonden, maar in het laboratoriumstelsel blijkt dat de meeste fotonen zich in een smalle bundel bevinden. De bundel is smaller naarmate de snelheid van het deeltje groter is. Beschouw een foton dat op een bepaald moment in het deeltjesstelsel een hoek  $\theta$  met de voorwaartse richting maakt.

**Vraag 1:** Bereken in het laboratoriumstelsel de tangens van de hoek  $\alpha$  die dit foton maakt met de voorwaartse richting als functie van  $\theta$ .

**Vraag 2:** Een elektron wordt versneld tot een snelheid van 99,5% van de lichtsnelheid. Bereken welk percentage van de uitgezonden fotonen zich in een voorwaartse bundel bevindt waarvan de tophoek  $2^\circ$  bedraagt.

---

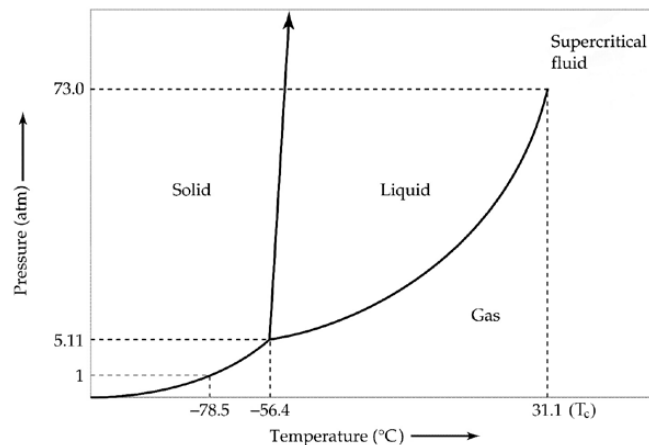
## 8. Stabiliteit en het kritisch punt

*K.K. Schakenraad en K.N. Duerloo  
Technische Universiteit Eindhoven en Stanford University*

**13 punten**

---

In figuur 8.1 is het druk-temperatuur-fasediagram van  $\text{CO}_2$  gegeven. Er zijn veel interessante thermodynamische eigenschappen van een stof aan een fasediagram af te lezen. Deze opgave zal gaan over het kritisch punt. Zoals te zien is in de afbeelding, loopt de fasescheidingslijn tussen de vloeibare en de gasvormige fase niet door tot in het oneindige, maar heeft de lijn een eindpunt: het kritisch punt. Voor temperaturen  $T$  onder de kritische temperatuur  $T_C$  bestaat er een duidelijk verschil tussen een vloeibare en een gasvormige fase. Voor  $T > T_C$  is er echter geen onderscheid meer mogelijk en spreekt men slechts nog van één fase: de superkritische fase (Engels: *supercritical fluid*).

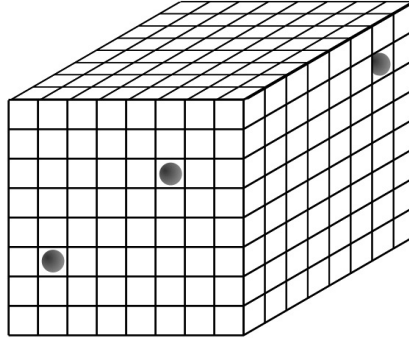


**Figuur 8.1:** Een voorbeeld van een  $(P, T)$ -fasediagram ( $\text{CO}_2$ ), waarin de fasescheidingslijn eindigt in het kritisch punt.

In deze opgave gaan we de fundamentele oorzaken voor het bestaan van het kritisch punt verkennen aan de hand van een sterk vereenvoudigd model voor de co-existentie van een materiaal in gas- en vloeistofvorm: het roostergas (zie figuur 8.2).

Het roostergas voldoet aan de volgende eigenschappen:

- We verdelen het beschikbare volume van het roostergas in  $M$  kubusvormige cellen. De cellen zijn genummerd:  $i = 1, \dots, M$ .
- Elke cel heeft  $z$  aanliggende cellen. Voor een interne cel van ons driedimensionaal kubiek roostergas geldt dus  $z = 6$ .
- In het roostergas bevinden zich  $N$  identieke deeltjes.
- In elke cel zit ofwel één, ofwel géén deeltje. Met andere woorden: het *bezettingsgetal*  $n_i = 0, 1$ , zodanig dat  $\sum_{i=1}^M n_i = N$ .



**Figuur 8.2:** Elk deeltje in het roostergas bevindt zich in één van de cellen van een rooster.

Verder maken we twee belangrijke veronderstellingen:

- We nemen enkel interacties tussen een deeltje en deeltjes in de  $z$  aanliggende cellen in beschouwing. Twee naburige, bezette cellen hebben een interactie-energie van  $-\varepsilon$ , waarbij  $\varepsilon > 0$ .
- We werken in de limiet:  $M, N \rightarrow \infty$ .

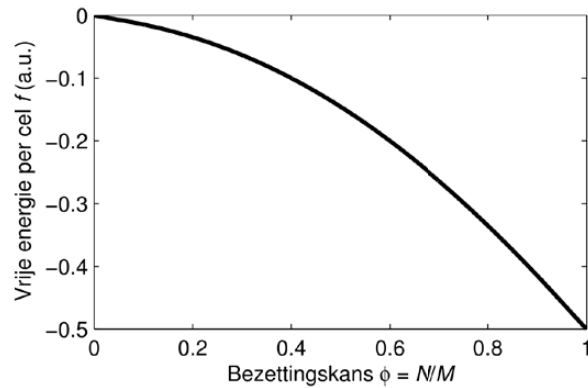
**Vraag 1:** In deze deelvraag gaan we aantonen dat de Helmholtz vrije energie per cel,  $f$ , van het systeem gegeven wordt door:

$$f = -3\varepsilon\phi^2 + k_B T[\phi \ln(\phi) + (1 - \phi) \ln(1 - \phi)] \quad (8.1)$$

Hierin is  $k_B$  de constante van Boltzmann en  $T$  de temperatuur.  $\phi = N/M$  is de bezettingskans voor elke cel, oftewel de *dichtheid* van het hele systeem. Voor het uitrekenen van energie, vrije energie en entropie maken we de zogenaamde *mean field approximation*: elke verdeling van  $N$  deeltjes over  $M$  cellen (met hoogstens 1 deeltje per cel) is even waarschijnlijk. Deze homogene benadering houdt dus niet rechtstreeks rekening met het feit dat de omgeving van een bezette cel eigenlijk energetisch voordeliger is.

- Bereken de statistische verwachtingswaarde van de energie,  $\langle U \rangle$ .  $U$  is de som van alle buurinteracties in het rooster. Verwaarloos de kinetische energie van de deeltjes.
- Bereken de entropie  $S$  van het systeem. Je kunt hiervoor de formule van Gibbs gebruiken:  $S = -k_B \sum_{\nu} P_{\nu} \ln(P_{\nu})$ . Hier is  $P_{\nu}$  de kans op een bepaalde verdeling  $\nu$  van de  $N$  deeltjes.
- Gebruik vervolgens de relatie  $f = (\langle U \rangle - TS)/M$ .

Voor een bepaalde waarde van  $T$  is in figuur 8.3 de vrije energie per deeltje,  $f$ , gegeven. Zoals elk fysisch systeem zal ook dit systeem altijd proberen zijn vrije energie te minimaliseren. Op het eerste gezicht zou dit kunnen betekenen dat  $\phi \rightarrow 1$ . Echter, het systeem heeft niet de mogelijkheid ergens extra deeltjes vandaan te halen. Een mogelijkheid om  $f$  toch te verlagen is een *spinodale fasescheiding*, waarbij  $\phi$  in een deel van het systeem wordt verhoogd naar  $\phi + \delta\phi$  en in de rest van het systeem wordt verlaagd naar  $\phi - \delta\phi$ . We noemen de dichtheid  $\phi$  *lokaal instabiel* als er een willekeurig kleine  $\delta\phi > 0$  bestaat waarvoor deze scheiding de vrije energie verlaagt.



**Figuur 8.3:** De vrije energie als functie van de dichtheid.

**Vraag 2:**

- a) Wat is de *algemene voorwaarde* op elke  $f(\phi)$  zodat  $\phi$  lokaal instabiel is?
- b) Voor welke  $\phi$  is het *driedimensionaal kubiek roostergas* lokaal stabiel?
- c) Schets een  $(\phi, T)$ -fasediagram voor het driedimensionaal kubiek roostergas gebaseerd op vraag b. Duid aan welke regio overeenstemt met de instabiliteit, de vloeistoffase, de gasfase en de superkritische fase. Duid ook het kritisch punt aan.
- d) Geef de  $(\phi, T)$ -coördinaten van het kritisch punt.

**Vraag 3:** Kan een bepaalde  $\phi$  lokaal stabiel zijn, maar toch een fasescheiding vertonen? Waarom wel/niet? Indien ja, schets een  $f(\phi)$ -curve waarvoor dit van toepassing is.

**Vraag 4:** Je weet nu waar het kritisch punt op de vloeistof-gas-fasescheidingslijn vandaan komt. Echter, een stof die naast vloeistof en gas een kristallijne vaste fase heeft, heeft nooit een kritisch punt op de vast/vloeibaar- of vast/gas-scheidingslijn. Waarom is dit zo?

## 9. De waterklok en puntwervels

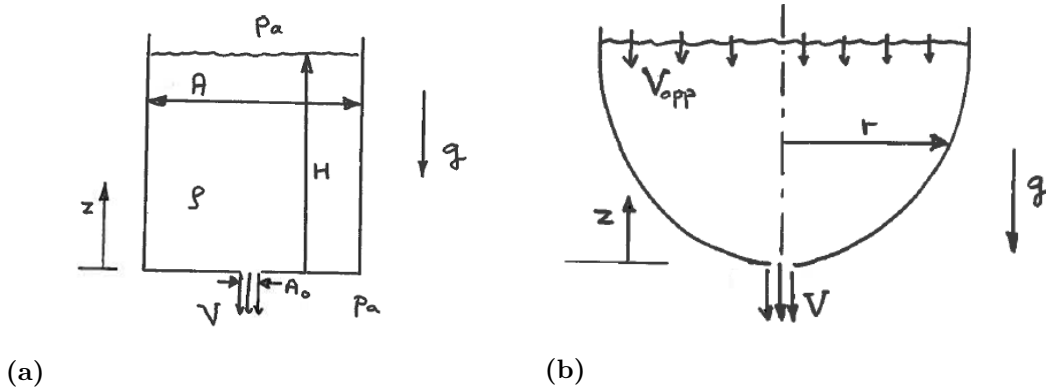
*G.J.F. van Heijst*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**9 punten**

**Vraag 1:** Beschouw een leeglopend watervat, zoals geschetst in figuur 9.1a. Het water stroomt weg uit het vat door een kleine opening (doorsnede-oppervlak  $A_0$ ) in de bodem. Het water heeft een incompressibele dichtheid  $\rho$  en de stroming mag als niet-viskeus worden beschouwd, zodat de wet van Bernoulli geldig is:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constant} \quad (9.1)$$

Hierbij zijn  $p$  en  $v$  de druk en de snelheid in een bepaald punt,  $z$  de verticale coördinaat t.o.v. een referentieniveau  $z = 0$ , en  $g$  de versnelling van de zwaartekracht.



**Figuur 9.1:** Twee voorbeelden van leeglopende watervaten. De vorm van vat b zorgt ervoor dat het waterpeil daalt met een constante snelheid: een waterklok.

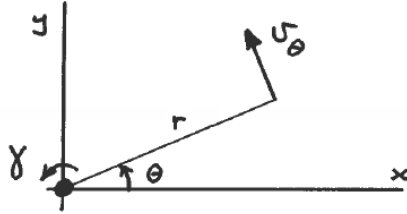
Overall buiten de vloeistof is de druk atmosferisch,  $p = p_a$ . Het water stroomt weg in een zgn. ‘aangepaste straal’, waarin de snelheid  $V$  uniform is en de druk gelijk is aan de omgevingsdruk. Verder is gegeven dat de uitstroomopening klein is t.o.v. het doorsnede-oppervlak van het cilindrische watervat:  $A_0 \ll A$ .

- a) Leid een uitdrukking af voor de uitstroomsnelheid  $V$  als functie van  $g$  en  $H$ , waarbij  $H$  de hoogte is van het momentane waterniveau.

Door het cilindersymmetrische vat een bepaalde vorm te geven, dus met  $A = A(z)$ , wil men een ‘waterklok’ maken, waarin het waterniveau met een constante snelheid daalt. Dit is geschetst in figuur 9.1b.

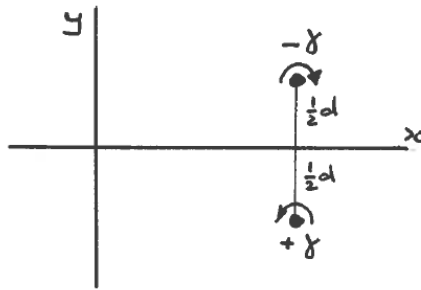
- b) Leid een uitdrukking af voor de vorm van het watervat waarbij een constante daalsnelheid,  $V_{\text{opp}}$ , van het waterniveau wordt verkregen.

**Vraag 2:** Een puntwervel met sterkte  $\gamma$  induceert een azimutaal snelheidsveld met snelheid  $v_\theta(r) = \frac{\gamma}{2\pi r}$ , zie figuur 9.2. In zichzelf induceert een puntwervel geen snelheid: een enkele puntwervel zal daarom niet gaan bewegen .



**Figuur 9.2:** Een puntwervel met sterkte  $\gamma$ .

- a) Beschouw nu de combinatie van twee puntwervels met sterkten  $+\gamma$  en  $-\gamma$  met onderlinge afstand  $d$ , zie figuur 9.3. Beargumenteer dat deze zgn. puntwerveldipool in negatieve richting langs de  $x$ -as transleert met snelheid  $V = \frac{\gamma}{2\pi d}$ .



**Figuur 9.3:** Een systeem van twee puntwervels met dezelfde sterkte  $\gamma$ , met een onderlinge afstand  $d$ .

Er wordt nu een puntbron met sterkte  $Q$  in de oorsprong geplaatst. Het snelheidsveld geïnduceerd door een bron is zuiver radiaal, met radiale snelheid  $v_r = \frac{Q}{2\pi r}$ . Beschouw nu weer de puntwerveldipool van vraag a die in negatieve richting langs de  $x$ -as transleert, nu in aanwezigheid van de bron, welke gefixeerd is in  $(x, y) = (0, 0)$ .

- b) Leid een uitdrukking af voor de trajectoriën van de puntwervels. *Hint:* gebruik poolcoördinaten  $(r, \theta)$  en bepaal de in de puntwervels geïnduceerde snelheidscomponenten  $v_r = \frac{dr}{dt}$  en  $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ .
- c) Toon aan dat de separatie-afstand van de puntwervels – voor het geval ze de bron ver gepasseerd zijn – is toegenomen tot  $d \exp(2\pi Q/\gamma)$ . Ga ervan uit dat  $d \ll x_i$ , waarbij  $x_i$  de initiële  $x$ -positie van de puntwervels voorstelt.

---

## 10. De drijvende kracht achter de laser-plasma-deeltjesversneller

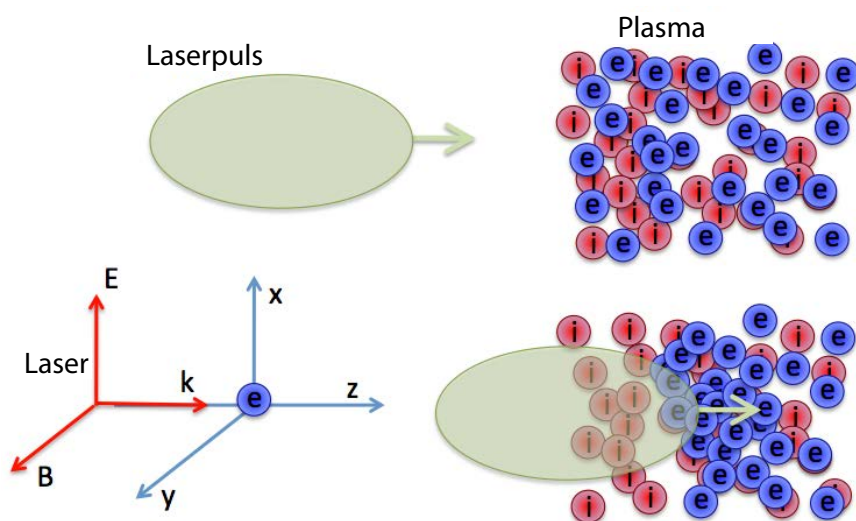
*J. van Tilborg en C. Benedetti  
Lawrence Berkeley National Laboratory*

**11 punten**

---

De laser-plasma-deeltjesversneller (beter bekend als de *laser plasma accelerator* (LPA)) is gebaseerd op de interactie van ultrakorte laserpulsen met subkritische-dichtheid-plasma's (transparant voor de laser). Om een voorbeeld te geven: door 1 Joule aan laserenergie te concentreren in een lichtpuls van 50 fs tijdsduur en een transversale afmeting van enkele micrometers, zal de veldsterkte van de laser zo groot worden dat de plasma-elektronen niet alleen op en neer trillen in het elektrisch veld, maar ook een voorwaartse duw krijgen (zie figuur 10.1). Deze duw zorgt voor een tijdelijke separatie van de elektronen en ionen, met bijbehorende longitudinale (in de richting van  $z$ ) elektrische velden, die meer dan drie ordes van grootte sterker zijn dan in conventionele deeltjesversnellers. Deze krachtige toename is de kern achter de drijfveer van wetenschappers en technici om de LPA beter te begrijpen, te controleren en toe te passen.

Merk op dat in dit regime van de laserveldsterkte, de snelheid van de elektronen relativistisch is, zodat de relativistische correctie op de elektronmassa niet kan worden verwaarloosd.



**Figuur 10.1:** Een schematische weergave van het mechanisme achter de laser plasma accelerator.

We gaan in deze opgave uit van een vrij elektron in vacuüm, op  $t = 0$  in rust op positie  $x = y = z = 0$ . De laserpuls beweegt zich voort langs de  $z$ -as, met het elektrische veld gepolariseerd langs de  $x$ -as. De snelheid van het elektron wordt typisch genormeerd met de lichtsnelheid, hetgeen  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$  levert. De impuls van het elektron kan worden genormeerd met  $m_0c$ , met  $m_0$  de rustmassa van het elektron, hetgeen  $\vec{u} = \vec{p}/(m_0c) = m_0\gamma\vec{v}/(m_0c) = \gamma\vec{\beta}$  levert. Ook de relativistische factor  $\gamma$  kan worden herschreven tot  $\gamma^2 = [1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2]^{-1} = 1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ .

In plaats van te werken met de laservelden  $\vec{E}$  en  $\vec{B}$  is het vaak handig om te werken met de magnetische vectorpotentiaal  $\vec{A}$ , gedefinieerd als  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  en  $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ . Ook  $\vec{A}$  wordt typisch genormeerd, tot  $\vec{a} = e\vec{A}/m_0c$  met  $e$  de absolute elektronlading.

**Vraag:** Geef de differentiaalvergelijking voor  $du_z/dt$  als expliciete functie van alleen  $u_z$  en  $a$  (met  $a = a_x$ ) en toon aan dat voor een arriverende laserpuls (veld van de puls neemt toe in de tijd) een voorwaartse beweging in de richting van  $z$  geïnitieerd wordt. Deze voorwaartse duw (weg van de laserpuls) wordt ook wel de *ponderomotive force* genoemd.

Voor deze vraag kun je de verrassend simpele uitdrukking gebruiken voor de impuls in de  $x$ -richting in de aanwezigheid van de laserpuls, namelijk  $u_x = a$ .

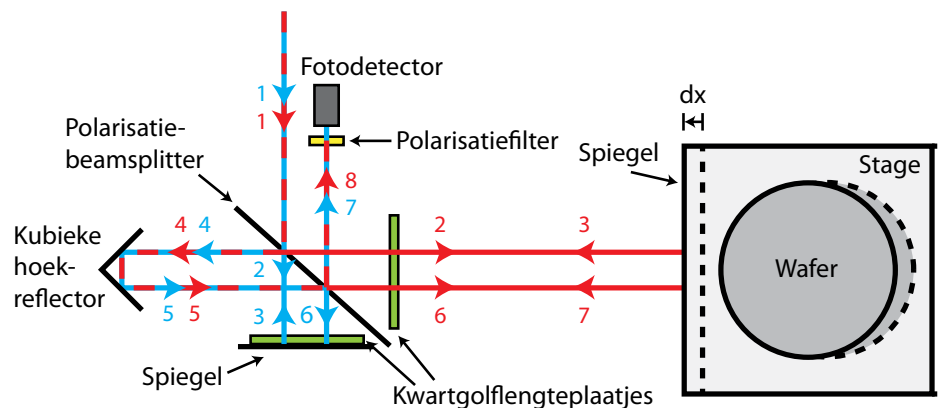


## 11. Positiemeting van een wafer stage

B. van der Pasch en T. de Kort  
ASML

8 punten

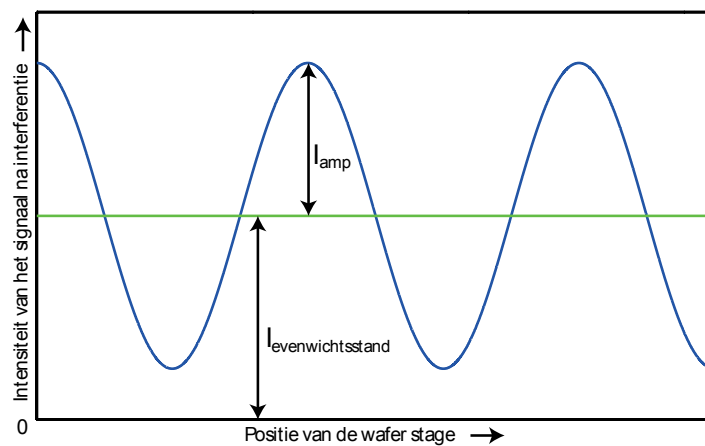
Computerchips worden gemaakt door halfgeleidermaterialen te deponeren en daarin patronen weg te etsen op cirkelvormige siliciumsubstraten, de zogenaamde *wafers*. Moderne chipfabrieken gebruiken door ASML gebouwde belichtingssystemen om de patronen voor hun chips te maken. De *wafers* met een diameter van 300 mm worden op een zogenaamde *wafer stage* geplaatst die in drie dimensies kan bewegen. Op deze manier kan de door de lens geprojecteerde afbeelding elk punt van de *wafer* bereiken, zonder dat de lens zelf hoeft te bewegen. Om zeer gedetailleerde patronen te kunnen maken, is het van groot belang zeer precies te weten waar de *wafer stage* zich bevindt. Deze positie wordt gemeten met behulp van een interferometer, die de positie meet van een platte spiegel die aan de *wafer stage* is vastgemaakt. Deze opgave gaat over deze positiebepaling. Een schematische afbeelding van de interferometer is weergegeven in figuur 11.1.



**Figuur 11.1:** Een schematische weergave van de interferometer. De onderling orthogonaal gepolariseerde componenten van de laser zijn in rood en blauw weergegeven. De afgelegde paden van beide componenten worden aangeduid met oplopende cijfers.  $dx$  geeft een kleine translatie weer van het translatieplatform.

Een Helium-Neonlaser (HeNe), met een golflengte van 633 nm, komt in de afbeelding van boven. De laser bestaat uit twee componenten met verschillende polarisatie. De componenten zijn beiden lineair gepolariseerd en onderling orthogonaal. In de figuur zijn deze componenten weergegeven met een blauwe en een rode kleur. De laser valt vervolgens op een polariserende *beamsplitter* die volledig transparant is voor één van de twee polarisatierichtingen en volledig reflectief voor de polarisatie daar loodrecht op. De ‘rode’ polarisatie zal daardoor reflecteren in de richting van de *wafer stage*, terwijl de ‘blauwe’ polarisatie rechtdoor gaat. Beide laserstralen zullen terugkaatsen en onderweg twee keer door een kwartgolflengteplaatje komen. Tweemaal door een kwartgolflengteplaatje reizen, leidt tot een rotatie van de polarisatierichting van 90 graden. Hierdoor zal de in rood weergegeven straal ditmaal door de *beamsplitter* heen gaan, terwijl de in blauw weergegeven straal gereflecteerd wordt.

Beide lichtstralen worden vervolgens gereflecteerd door een kubieke hoekreflector, die zorgt dat de inkomende en uitgaande lichtstralen parallel zijn. Een ideale kubieke hoekreflector beïnvloedt de polarisatie van het licht niet. Hierna volgen de lichtstralen de paden zoals te zien is in figuur 11.1, om uiteindelijk uit te komen bij een polarisatiefilter en een fotodetector. Het polarisatiefilter is 45 graden gedraaid ten opzichte van beide polarisatierichtingen. Hierdoor wordt  $\sim 71\%$  van het  $E$ -veld van beiden lichtstralen doorgelaten, waarna ze beiden dezelfde polarisatie hebben (namelijk die van het filter). Hierdoor treedt interferentie op. De fotodetector meet de intensiteit van het signaal na interferentie en gebruikt dit om het faseverschil tussen de twee lichtstralen uit te rekenen. De resolutie van de fasemeting is  $\frac{1}{250}$  deel van een volledige periode. Uit het faseverschil kan vervolgens de positie van de *wafer stage* worden bepaald. In figuur 11.2 is de intensiteit van het signaal na interferentie tussen de ‘rode’ en ‘blauwe’ polarisatietakken geplot als functie van de positie van de *wafer stage*, voor het algemene geval dat de intensiteiten van de twee polarisatietakken na het polarisatiefilter,  $I_1$  en  $I_2$ , niet aan elkaar gelijk zijn.



**Figuur 11.2:** De intensiteit van het signaal na interferentie als functie van de positie van de wafer stage.

**Vraag 1:** Bereken de nauwkeurigheid waarmee de interferometer een positieverschuiving van de *wafer stage* kan bepalen.

Voor de volgende vraag heb je het begrip *modulatiediepte* nodig. De modulatiediepte van het signaal na interferentie is gedefinieerd als:

$$M = \frac{I_{\text{amp}}}{I_{\text{evenwichtsstand}}} \cdot 100\% \quad (11.1)$$

Hoe groter de modulatiediepte, hoe nauwkeuriger de positie van de *wafer stage* kan worden bepaald. In de ideale situatie zijn  $I_1$  en  $I_2$  aan elkaar gelijk, wat leidt tot een modulatiediepte van 100%.

**Vraag 2:** Het is belangrijk dat het polarisatiefilter vóór de fotodetector goed georiënteerd is ten opzichte van de polarisaties van de twee inkomende polarisatietakken. Bereken wat de fout in de oriëntatiehoek van het filter mag zijn zodat het verlies in de modulatiediepte van het totale signaal niet groter is dan 1%. Los dit probleem algebraïsch op.

**Vraag 3:** Een niet-ideale kubieke hoekreflector roteert de polarisatie van de laserstralen die er doorheen gaan. Hierdoor kan een fout in de polarisatierichting tot  $8^\circ$  ontstaan. Leg uit hoe dit de werking van de interferometer beïnvloedt.

Voor vragen 4 en 5 nemen we aan dat de *wafer stage* stil staat. In de praktijk kan het gebeuren dat er tussen de *wafer stage* en de interferometer een luchtbel ontstaat die een hogere temperatuur heeft dan de omringende lucht. In deze opgave rekenen we aan een luchtbel met een diameter van 200 mm en een temperatuurverandering  $\Delta T = 10$  mK. De brekingsindex van lucht,  $n$ , als functie van de temperatuur,  $T$ , wordt gegeven door de vereenvoudigde Edlen-vergelijking:

$$n - 1 \approx \frac{2.7 \cdot 10^{-4}}{1 + 0.0036T} \quad (11.2)$$

**Vraag 4:** Bereken de meetfout als gevolg van deze warme luchtbel.

**Vraag 5:** Noem drie andere luchtgerelateerde effecten die een meetfout zouden kunnen veroorzaken.

Tijdens het belichten van de *wafer* beweegt de *wafer stage* met een snelheid  $v = 1$  m/s. Door de eindige waarde van de lichtsnelheid zal er een fout in de berekende positie zitten als gevolg van de beweging van de *wafer stage*. Neem aan dat het systeem zodanig gekalibreerd is dat bij een positie van  $x = 0$  mm (het midden van de *wafer*) de meetfout als gevolg van het bewegen gelijk is aan 0.

**Vraag 6:** Bereken de fout in de gemeten positie aan de buitenkant van de *wafer*.

---

## 12. Het GHZ-experiment

*S.J.J.M.F. Kokkelmans*  
*Technische Universiteit Eindhoven*

**12 punten**

---

In 1926 publiceerde Max Born zijn interpretatie van de kwantummechanische golf functie, waarin hij schrijft dat Erwin Schrödingers golf functie  $\Psi(x, t)$  (eigenlijk  $|\Psi(x, t)|^2$ ) geassocieerd moet worden met de *waarschijnlijkheid* dat een deeltje zich in een bepaalde toestand bevindt. Deze interpretatie introduceert een *onbepaaldheid* in de theorie: zelfs als je alles weet wat kwantummechanica je te vertellen heeft (de golf functie), kun je niet voorspellen waar het deeltje zich bevindt op een bepaald tijdstip  $t$ . Dit leidde direct tot grote discussies binnen de fysische wereld. Hoe moet deze onbepaaldheid geïnterpreteerd worden? Als bijvoorbeeld een deeltje op een positie  $x$  gevonden wordt op tijd  $t$ , waar was het deeltje dan net voor het tijdstip  $t$ ? De opvattingen kunnen grofweg in drie kampen worden onderverdeeld:

- De *realistische* interpretatie beweert dat het deeltje net voor tijdstip  $t$  ook gewoon op (of vlakbij) positie  $x$  was. In de opvatting van de realist is de kwantummechanica dus een incomplete theorie: hoewel het deeltje op positie  $x$  was, kon de theorie ons dit niet vertellen. De onbepaaldheid wordt dus veroorzaakt door een tekortkoming van de theorie.
- De *orthodoxe* interpretatie of *Kopenhagen-interpretatie* beweert dat het deeltje net voor tijdstip  $t$  helemaal nergens was. Het deeltje werd beschreven door een waarschijnlijkheidsverdeling en werd pas door de positiemeting gedwongen een positie  $x$  te ‘kiezen’. De onbepaaldheid is dus intrinsiek een eigenschap van de natuur.
- De *agnostische* visie is dat deze discussie onzinnig is. Je zult immers niet met een experiment kunnen bepalen wat de toestand van een deeltje is *net voor* je een meting doet. Deze visie hanteert het motto “*Shut up and calculate*”.

In deze opgave bekijken we het zogenaamde GHZ-experiment, vernoemd naar de bedenkers Daniel Greenberger, Michael Horn en Anton Zeilinger. Dit experiment is een alternatief voor de beroemde Bell-ongelijkheden en voorspelt sterk verschillende uitkomsten tussen de realistische en de orthodoxe interpretatie.

We beschouwen de 3-*qubits*-toestand  $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |110\rangle - |011\rangle - |101\rangle)$ . De *qubits* zijn van links naar rechts genummerd als 2, 1 en 0 en kunnen dan weergegeven worden door  $|a_2 a_1 a_0\rangle$ . We gaan ervan uit dat er na preparatie van de toestand  $|\Psi\rangle$  geen interacties tussen de *qubits* mogelijk zijn.

**Vraag 1:** Laat zien dat  $|\Psi\rangle$  een verstrengelde toestand is.

We gaan nu vier verschillende scenario’s bekijken, waarbij de begintoestand in elk scenario de toestand  $|\Psi\rangle$  is. In scenario 1 lezen we de *qubits* uit. Noem de resultaten van de metingen  $x_2$ ,  $x_1$  en  $x_0$ .

**Vraag 2:** Wat zijn de mogelijke meetuitkomsten en wat is de kans op elke uitkomst?

**Vraag 3:** Bereken  $x_2 \oplus x_1 \oplus x_0$ , waarbij  $\oplus$  de modulo-2-optelling is (dus  $a \oplus b = 0$  als  $a + b$  even is en  $a \oplus b = 1$  als  $a + b$  oneven is).

In scenario 2 laten we *Hadamard gates* werken op *qubits* 1 en 2. De *Hadamard gate* correspondeert met de operator  $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|)$ . Vervolgens lezen we de drie *qubits* uit. Noem de resultaten van de metingen  $x_2^H$ ,  $x_1^H$  en  $x_0$ .

**Vraag 4:** Bereken de toestand van het systeem na toepassing van de *Hadamard gates* en laat zien dat  $x_2^H \oplus x_1^H \oplus x_0 = 1$ .

Een realist beweert nu dat de waarde van  $x_0$  die gemeten wordt in scenario 1, dezelfde moet zijn als de waarde van  $x_0$  die gemeten zou worden in scenario 2. Zijn redenering is dat de *Hadamard gates* alleen werken op *qubits* 1 en 2, en dus geen invloed kunnen hebben op de waarde van qubit 0.

**Vraag 5:** Bent u het met de bewering van deze realist eens? Onderbouw uw antwoord.

In scenario 3 laten we *Hadamard gates* werken op *qubits* 0 en 1. Vervolgens lezen we de *qubits* uit. Voor deze meting geldt  $x_2 \oplus x_1^H \oplus x_0^H = 1$ . In scenario 4 werken de *Hadamard gates* op *qubits* 0 en 2. Voor de meetuitkomsten geldt nu  $x_2^H \oplus x_1 \oplus x_0^H = 1$ . De redenering van de realist kan worden doorgetrokken om te beargumenteren dat de waarde van  $x_1$  van scenario 1 dezelfde is als die van scenario 4, de waarde van  $x_1^H$  in scenario 2 dezelfde is als die van scenario 3, etc.

**Vraag 6:** Laat met behulp van de 4 gevonden relaties (die van opgaven 3 en 4, en de 2 relaties hierboven) zien of het realistische standpunt – en daarmee het agnostische standpunt – houdbaar is. *Hint:* ga na of de relaties onderling consistent zijn onder de realistische aanname.

---

Tot slot

---

**De PION-commissie 2013:**



Van links naar rechts: *Bart, Koen, Sten, Maarten, Jelle* en *Guus*.

**De raad van aanbeveling:**

- *C.J. van Duijn*
- *G.M.W. Kroesen*
- *R. van Gijzel*
- *R.H. Dijkgraaf*
- *W.H.G. Lewin*

# Discover



# worlds

# applied physics

[www.appliedphysics.nl](http://www.appliedphysics.nl)

# NANO

# FLOW

# PLASMA

# FUSION

**TU** **e** Technische Universiteit  
Eindhoven  
University of Technology

Where innovation starts



## How do you print 20 nm structures using 193 nm light waves?

**Join ASML as a Physics Engineer and help push the boundaries of technology.**

At ASML we bring together the most creative minds in science and technology to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips.

Our machines image billions of structures in a few seconds, all with an accuracy of a few silicon atoms. And we intend to be imaging even more billions - thanks to our lithography. This will create microchip features of just 20 nm using light waves of 193 nm. That's like drawing an extremely fine line using an oversized marker.

That's why we need talented Physics Engineers. People who can design sensors, actuators and control models that manipulate light at nanometer levels. People who know how to measure and model deviations from the ideal world. People who want to achieve something that, at first sight, looks simply impossible.

If you're up for it, you'll be part of a multidisciplinary team with plenty of freedom to experiment and learn new skills. You'll also be rubbing shoulders with some of the brightest minds around.

[www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers)

# ASML

**For students who think ahead**